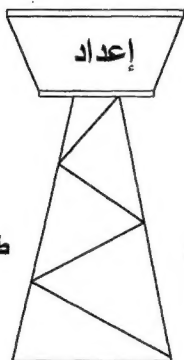


# الإستاتيكا الهندسية

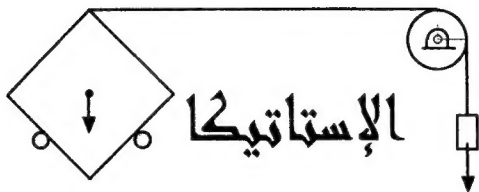


دكتور  
طارق زين العابدين

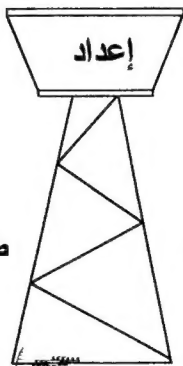
دكتور  
عبدالله زين الدين

قسم الهندسة الزراعية  
كلية الزراعة  
جامعة الإسكندرية





# الإستاتيكا الهندسية



دكتور  
طارق زين العابدين

دكتور  
عبدالله زين الدين

قسم الهندسة الزراعية  
كلية الزراعة  
جامعة الإسكندرية



# بسم الله الرحمن الرحيم

" و قل ربى زدنى علماً "

أردت بهذا الكتاب أن يعطى ما يحتاجه طالب الهندسة الزراعية من مواضيع في الإستاتيكا الهندسية تفيده في السنة الأولى و السنوات التالية حيث أشتمل على مواضيع في الإتران و الإحتكاك و التى نخدم فيما يلي من دراسة المواد المتعلقة من أسس الخرسانة و الحديد و كذلك اتزان الجرار و الآلات و ما شابه ذلك .

و قد نهجت في هذا الكتاب على نهج الكتب الجامعية الأخرى من حيث كتابة المعادلات بالحروف اللاتينية حتى يسهل على الطالب متابعة الإطلاع على المراجع العلمية باللغات الأجنبية في سهولة و يسر و الكتاب يحوي عدداً و فيراً من التمارين المحلولة و غير المحلولة و ذلك تيسراً على الطالب و ضماناً لفهمه .

و قد راعيت أن يكون هذا الكتاب بقدر الإمكان خالي من الأخطاء المطبعية و أن يكون تبويبه بحيث تسلسل مواضيعه مع التدرج الطبيعي للمستوى العلمي للطالب . و لذا أرجو أن يكون هذا الكتاب بمثابة الأداة التى تسهل على الطالب الحصول على كل ما يحتاجه في دراسة الإستاتيكا و في حدود ما يتطلبه طبيعة طالب الهندسة الزراعية .

و الكتاب يصلح أيضا للأخوة الزملاء المحاضرين لإستخدامه ككتاب جامعي في مجال الهندسة الزراعية .

" ربنا لا تؤاخذنا ان نسينا أو أخطأنا انك انت السميع العليم "

صدق الله العظيم

**دكتور : عبد الله مسعد زين الدين**

بكالوريوس في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية - جامعة الاسكندرية - جامعة نونكا أسكوشا - همالفاكس - كندا

أستاذ مساعد بقسم الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

**دكتور : طارق كمال الدين على زين العابدين**

بكالوريوس في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

ماجستير في الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

دكتوراه في الهندسة الزراعية - كلية الهندسة - جامعة نونكا أسكوشا - همالفاكس - كندا

مدرس بقسم الهندسة الزراعية - كلية الزراعة - جامعة الإسكندرية

# الفهرس

- ( ٧ ) ..... الباب الأول : الكميات القياسية و المتجهة
- ( ٧ ) ..... مقدمة
- ( ٨ ) ..... الكميات القياسية و المتجهة
- ( ١٠ ) ..... أنواع المتجهات
- ( ١١ ) ..... جمع المتجهات
- ( ١٣ ) ..... طرح المتجهات
- ( ١٤ ) ..... استعمال فكرة جمع المتجهات في حل بعض المسائل الهندسية
- ( ١٤ ) ..... ضرب كمية قياسية في كمية متجهة
- ( ١٥ ) ..... أمثلة توضيحية
- ( ١٩ ) ..... الوحدات المتجهة الأساسية
- ( ٢٠ ) ..... تقاضيل المتجه بالنسبة للزمن
- ( ٢١ ) ..... الضرب الإتجاهي لمتجهين
- ( ٢١ ) ..... الضرب القياسي لمتجهين
- ( ٢٣ ) ..... أمثلة محلولة

- الباب الثاني : التعاريف و القوانين الأساسية..... ( ٣٣ )
- التعاريف الأولية في علم الإستاتيكا..... ( ٣٣ )
- القوانين الأساسية..... ( ٣٥ )
- قانون تركيب و تحليل القوى..... ( ٣٥ )
- قانون التوازن..... ( ٣٦ )
- نقل القوى..... ( ٣٧ )
- الباب الثالث : عمليات تركيب و تحليل القوى..... ( ٣٩ )
- أولاً : عمليات تركيب القوى..... ( ٣٩ )
- تركيب القوى المتتية..... ( ٣٩ )
- تركيب القوى المتفرقة..... ( ٤١ )
- عزم قوة  $F$  حول نقطة الأصل  $O$ ..... ( ٤٦ )
- عزم قوة  $F$  حول نقطة  $B$  إحداثياتها  $(X_0, Y_0)$ ..... ( ٤٦ )
- معادلة خط عمل المحصلة..... ( ٤٧ )
- طرق تحليلية أخرى..... ( ٤٨ )
- الإزدواج..... ( ٤٩ )
- ثانياً : عمليات تحليل القوى..... ( ٥٠ )
- تحليل قوى  $R$  إلى مركبتين في خطي عمل معلومين..... ( ٥٠ )
- تحليل قوة  $R$  إلى مركبتين بمعرفة خط عمل إحدهما (١) ونقطة  $A$  على..... ( ٥١ )
- خط عمل الأخرى..... ( ٥١ )
- تحليل قوة  $R$  إلى ثلاث مركبات خطوط عملها معلومة 1, 2, 3..... ( ٥٢ )
- أمثلة محلولة..... ( ٥٣ )
- أمثلة على إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتفرقة..... ( ٦٣ )
- أمثلة على تحليل القوى في المستوى..... ( ٧٣ )
- تمارين..... ( ٧٩ )



الباب الرابع : اتزان الجسم و الجسم المتماك ..... ( ٨٣ )

أولاً : اتزان الجسم ..... ( ٨٣ )

ثانياً : اتزان الجسم المتماك ..... ( ٨٤ )

الإرتكاز البسيط ..... ( ٨٤ )

الإرتكاز التفصلي ..... ( ٨٥ )

الثبت ..... ( ٨٦ )

ثالثاً : شروط اتزان الجسم المتماك ..... ( ٨٦ )

رابعاً : السوائد و الشدادات ..... ( ٨٨ )

أمثلة محلولة ..... ( ٩١ )

تمارين ..... ( ١٠٦ )

الباب الخامس : اتزان مجموعة الجسيمات ..... ( ١٠٩ )

المياكل المحملة بالمفاصل ( الجمالونات أو الشبكيات Trusses ) .. ( ١١٠ )

أمثلة ..... ( ١١١ )

خطوات حل المسائل المتعلقة بإتزان الجسيمات ..... ( ١١٦ )

التمائل الإستاتيكي حول محور ..... ( ١٢٠ )

أمثلة محلولة ..... ( ١٢٥ )

تمارين ..... ( ١٣٢ )

الباب السادس : اتزان مجموعة الأجسام المتماسكة ..... ( ١٣٤ )

التمائل ..... ( ١٤٠ )

المفاصل المحملة ..... ( ١٤٢ )

تمارين ..... ( ١٦٣ )

## الباب السابع : الإحتكاك ..... ( ١٦٩ )

زاوية الإحتكاك ..... ( ١٧٠ )

الإنزلاق و الانقلاب ..... ( ١٧٢ )

مقاومة التدحرج ..... ( ١٧٥ )

احتكاك المخاور ..... ( ١٧٨ )

الإسفين ..... ( ١٧٩ )

احتكاك الحبال و السيور ..... ( ١٨١ )

أمثلة متنوعة ..... ( ١٨٦ )

تمارين ..... ( ٢٠١ )

## الباب الثامن : مركز الثقل ..... ( ٢٠٥ )

نظرية مراكز الأجزاء ..... ( ٢٠٨ )

المستويات المركزية والتماثل ..... ( ٢٠٨ )

بعض الأمثلة بالتكامل المباشر ..... ( ٢٠٩ )

نظرية بابوس ..... ( ٢٢٠ )

أمثلة محلولة ..... ( ٢٢٢ )

## الكميات القياسية والمتجهة

## ١ - مقدمة

يعتبر علم الميكانيكا أحد العلوم الفيزيائية ويقوم بدراسة حالة الأجسام من حيث السكون والحركة وذلك نتيجة تأثير قوى خارجية على تلك الأجسام والتي تدر من حالتها من سكون إلى حركة أو العكس. ونجد التطورات التكنولوجية الحديثة في نظرية الاستقرار ومتانة المنشآت والآلات وتصميم الصواريخ ومركبات الفضاء والتحكم الألي بها والآلات الكهربائية وأجهزتها وسلوك الخزانات والبركات تعتمد على القواعد الأساسية لعلم الميكانيكا.

ويعتمد علم الميكانيكا بصورة أساسية على علم الرياضيات ولهذا تستخدم تلك المبادئ في حل المسائل العلمية. ومن العروف أن علم الميكانيكا ينقسم إلى قسمين وهما: الديناميكا ويختص بدراسة حركة الأجسام ولذا يسمى أيضا علم الحركة. والقسم الثاني الاستاتيكا علم السكون وهو موضوع هذا الكتاب ويعرف على أنه علم يبنى بدراسة عمليات تركيب وتحليل القوى وشروط توازن هذه القوى على الأجسام كما تبحث في توزيع القوى بين الأجسام المتصلة وطرائق الإرتكاز والإتصال و هي بذلك أساس نظريات الإنشاء الهندسي أو بمعنى آخر هو علم يقوم بدراسة الأجسام المادية تحت تأثير القوى.

ويشمل الأثران حالة السكون المستمر والحركة المنتظمة في خط مستقيم أو الحركة الدورانية المنتظمة لجسم متماسك حول محوره بشرط لا يطرأ أي تغير على حالة الجسم وتنقسم الاستاتيكا إلى استاتيكا الأجسام المتماسكة وهي موضوع الدراسة واستاتيكا الأجسام المرنة وأخيرا استاتيكا الموائع والدراسة الاستاتيكا وجهتان متباعدتان أولهما الاستاتيكا التحليلية والثانية الإلا. ناتيكا البيانية.

وقبل دراسة القوانين الأساسية و عرض التعاريف الأولية لعلم الإستاتيكا يجب التعرف على الكميات و كيف تقسم مع الطرق لدراسة المتجهات بمض الشئ حيث أنها تفيد في عملية تحليل وتركيب القوى .

## ٢ - الكميات القياسية والمتجهة :

يبني علم الميكانيكا على نوعين من الكميات أحدهما قياسية والأخرى اتجاهية

### أ- الكميات القياسية (Scalars) :

تعرف تلك الكميات من مفاديرها فقط أى بعدد من وحدات معينة وليس لها اتجاه فراغى ومن امثلتها الزمن والطول والكتلة وهى تعرف أيضا على أنها كميات أساسية (fundamental quantities) والحجم والكثافة ومقدار السرعة والعجلة والطاقة وهى تعرف على انها كميات مشتقة (derived quantities). ولكل منها وحدات (units) الخاصة التى تصير بها الكميات وهى فى الغالب ثلاث أنظمة مبنية على أسس وحدات الكميات الأساسية وهى:

١- النظام الموى المطلق (النظام العلمى SI)

مر - كيلو جرام - ثانية (M.K.S. system)

٢- النظام الفرنسى المطلق

ستيمتر - جرام - ثانية (C.G.S. sytem)

٣- النظام البريطانى

قدم - باوند - ثانية (F.P.S. system)

ومن الملاحظ أن تلك الكميات لا تتضمن بطبيعتها معنى الاتجاه ويمكن تمثيل هذه الكميات على

مقياس مدرج بحيث تخصص إحدى جهتيه من نقطة الأصل أو الصفر للكميات الموجبة وتخصص الجهة الأخرى للكميات السالبة كما يحدث في الرسومات البيانية (شكل ١-١). أيضا تخضع تلك الكميات للعمليات الحسابية والجبرية العادية للأعداد.



شكل (١-١) . يوضح تمثيل الكميات القياسية على مقياس مدرج.

ولنذكر هنا بعض القوانين الأساسية من علم جبر الأعداد - وكلها من البديهيات الأولية - وذلك لمضاهاتها فيما بعد بمنيلاتها في جبر المتجهات:

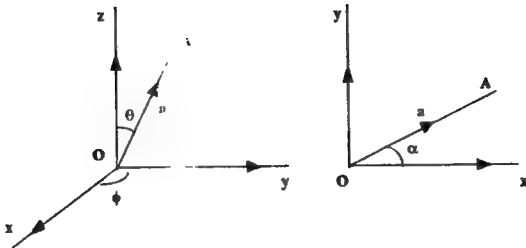
(I)  $a + b = b + a$  قانون التبادل (Commutative Law)

(II)  $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$  قانون الترتيب (Associative Law)

(III)  $m(a + b) = ma + mb$  قانون التوزيع (Distributive Law)

## ب- الكميات المتجهة (Vectors) :

تعرف الكميات المتجهة بأنها كميات لها مقدار واتجاه وهي تخضع لقانون متوازي الاضلاع الذي يبين طريقة جمعها. ومن أمثلتها الانتقال أو الأزاحة و السرعة والعجلة والقوة والعزم والدفع وكمية الحركة وكلها لا يتم التعرف عليها إلا بذكر اتجاهها. ولهذا فإن الكمية المتجهة تحدد بمقدار (Magnitude) أى بعدد من الوحدات كاللتر في الثانية للسرعة أو وزن الكيلو جرام للقوة. أما الاتجاه فيحدد بزوايا ميل المتجه على محاور ثابته كما في الشكل (١-٢). فإن تعين اتجاه المتجهات الواقعة في مستوى يتم بتحديد زاوية الميل ( $\alpha$ ) مع المحور الأفقى ( $X$ ) وذلك مأخوذاً ضد عقارب الساعة. أما إذا وقعت تلك المتجهات في الفراغ فيحدد اتجاهها بزائيتين ( $\phi$  ,  $\theta$ ) مع المحورين ( $Z_0$  ,  $X$ )



شكل (٢-١) تحديد اتجاه المتجهات أ- في مستوى ب- في الفراغ

ويرمز للمتجه بحرف واحد مثل  $a, b, c, \dots$  كما يرمز له بحرفين أحدهما في أول نقطة والآخر في آخر نقطة وفوقهما خط أفقي أو سهم مثل  $\overrightarrow{AB}$  or  $\overrightarrow{BA}$  مع مراعاة مطابقة ترتيب الحرفين لاتجاه سهم المتجه. أيضاً يرمز له بالرمز  $V$  ويمثل طوله بالقدر  $V$  ويرسم فوقه خط مستقيم له رأس سهم يشير إلى اتجاهه. ويكتب بخط خفيف مائل (إيطالي)  $V'$  معبراً عن قيمته بينما تستعمل الكتابة العاقمة في حالة الكميات المتجه

وتصنف المتجهات إلى ثلاثة أصناف هي متجهات حرة ، منزقة أو ثابتة.

### ٣ - أنواع المتجهات :

#### ١- المتجه الحر (Free vector)

وهو غير مقيد باتجاه واحد في الفضاء ومثل ذلك الجسم المتحرك بدون دوران تصير حركة أى نقطة من الجسم أو إزاحتها كمتجه. ويعين المتجه الحر في المستوى كميتان قياسيتان هما المقدار  $a$  والميل  $\alpha$  أو مركبته الأفقية  $a_x$  والرأسية  $a_y$  أما في الفراغ فتعبر المتجه الحر بثلاث كميات قياسية هي مركبته في اتجاهات المحاور الكرتيزية  $(x, y, z)$  مثلاً.

## ٢ - المتجه المقيد بخط عمل (المتزلق) (Line-bound vector)

وهو المتجه الذى يتقيد باتجاه معين فى الفضاء ونتجه الكمية بالتزامن. ولهذا يجوز عند دراسة التأثير الخارجى لقوة ما على جسم صلب أن تطبق هذه القوة على أى نقطة على امتداد خط عملها دون أن يتغير تأثيرها على الجسم ككل. يلزم لتحديد تلك المتجه فى المستوى ثلاث كميات قياسية هى المقدار وتقاطع خط العمل مع محورى الإحداثيات مثلاً.

## ٣ - المتجه المقيد بنقطة تأثير (الثابت) (Point-bound vector)

وهو المتجه المقيد بنقطة ثابتة فى الفضاء وعليه يشغل المتجه فى هذه الحالة موقعاً محدداً فى الفضاء ، ويحدد المستوى أربع كميات قياسية هى إحداثيات نقطة تأثير ومقدار وميل المتجه ومن أمثلتها القوة المؤثرة على جسم مرن أو مانع.

ومن المعارف عليه أن المتجهات لها مقداراً واتجاهاً كما أنها تخضع لقانون متوازى الاضلاع عند التركيب لتلك المتجهات (جمع أو طرح)

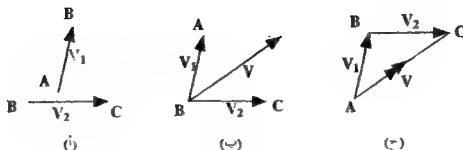
## ٤ - جمع المتجهات :

فإذا فرض أن هناك متجهين  $\overline{AB}$  وآخر  $\overline{BC}$  ويرمز لها  $V_1$  و  $V_2$  على الترتيب كما فى الشكل (١) ، وعاملة كلا من  $V_1$  و  $V_2$  على أنهما متجهين حريين فيجوز أسبداهما بالنتيجة المكافئ  $V$  الذى يمثل قطر متوازى الاضلاع المكون  $V_1$  و  $V_2$  كضلعين له كما فى الشكل (١ب) ويمثل هذا التركيب أو جمع المتجهات بالمعادلة:

$$V = V_1 + V_2$$

أو

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$



الشكل (١-٣)

وهو جمع لكميات ذات اتجاه وليس جمع كميات غير متجه وعلامة + الواردة فى هذه المعادلة لا تدل على جمع جبرى وإنما على التركيب للمتجهات باعتبار المتجهين  $V_1$  و  $V_2$  حريين فيمكن جمعهما باستخدام قانون المثلث بإضافة ذيل أحدهما إلى رأس الآخر كما هو فى الشكل (١ج) للحصول على المتجه المكافئ ولذا تبديل ترتيب جمع المتجهات لا يؤثر على حاصل الجمع وعبارته أخرى

$$V_1 + V_2 = V_2 + V_1$$

ويمكن تصميم فكرة جمع المتجهين على أى عدد من المتجهات بما يسمى مضلع المتجهات ABCDE والممثل بالمتجهات  $V_1, V_2, V_3, V_4$  والحصله  $V$  حيث المعادلة

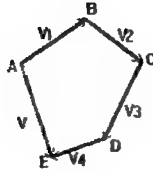
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

أو

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

المعادلة تدل على أن المتجه AE أو  $V$  هو محصلة المتجهات الأربعة الأخرى على يمين المعادلة ويراعى الانتقال على أضلاع المضلع فى اتجاه دائرى واحد وأن تكون المحصلة هى المتجه القافل للمضلع أى الواصل بين أول و آخر نقطه فيه شكل (١-٤)





شكل (١ - ٤)

## ٥ - طرح المتجهات :

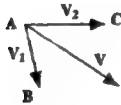
يمكن الحصول على طرح المتجهين  $V_1 - V_2$  وبسهولة وذلك بإضافة  $V_1$  إلى  $V_2$  أنظر ش - (١-٥) طبقاً لقانون متوازي الأضلاع أو قانون المثلث ويعبر عادة عن الفرق  $V$  بين المتجهين بالمعادلة

الأنجابه التالية

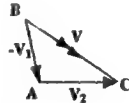
$$V = V_1 + V_2$$

حيث تعنى العلامة السالبة أمام المتجه عكس اتجاه الانتقال عليه أى عكس سهمه وبذلك يكون

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$



(أ)



(ب)

الشكل (١-٥)

## ٦ - استعمال فكرة جمع المتجهات في حل بعض

### المسائل الهندسية:

يمكن الاستعانة بفكرة جمع المتجهات في اثبات بعض المسائل الهندسية كمسألة وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة فمثلا ثلاث نقاط  $A, I, C$  تقع على استقامة واحدة اذا تحققت المعادلة الاتجاهية الآتية:

$$\overline{AB} = n \cdot \overline{AC}$$

وفيما  $n$  كمية قياسية عددية، فمعنى المعادلة السابقة أن التجهين  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AC}$  متوازيان والنسبة بين مقدارها هي  $n$  ولما كان المتجهان مشتركين في النقطة  $A$  وجب أن يكونا على استقامة واحدة.

## ٧ - ضرب كمية قياسية في كمية متجهة :

إذا ضربت كمية متجهة  $a$  في كمية قياسية  $n$  أنتج ذلك كمية متجهة موازية للأولى مقدارها  $n$  من المرات مقدار الأولى. وكذلك قسمة المتجه  $a$  على كمية قياسية  $n$  يعطي متجها موازيا للأول مقداره

$$\frac{a}{n}$$

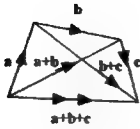
ويمكننا بناء على ما تقدم أن نحزم بصفة القوانين الأساسية الآتية فيما يتعلق بجمع المتجهات:

$$(I) \quad a + b = b + a$$

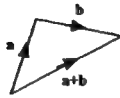
$$(II) \quad (a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

$$(III) \quad m[a + b] = ma + mb$$

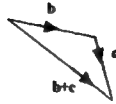
والبراهين واضحة في الشكل (٦-١) أ ، ب ، ج



(a)



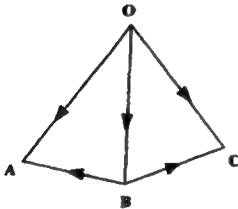
(b)



(d)

شكل (٦-١) القوانين الأساسية في جمع المتجهات

أمثلة توضيحية:



(١) إذا تحققت المعادلتان الآتيتان

$$p \cdot OA + q \cdot OB + r \cdot OC = 0$$

$$\& p + q + r = 0$$

بالنسبة إلى المتجهات المبنية بشكل

(١-١)

فأثبت أن النقط الثلاثة  $A, B, C$  على استقامة واحدة علما بأن الكميات  $(p, q, r)$  كميات قياسية.

الحل:

$$\begin{aligned} & p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= p \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}) + q \cdot \overrightarrow{OB} + r \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= (p + q + r) \overrightarrow{OB} + p \cdot \overrightarrow{BA} + r \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \mathbf{0} + p \cdot \overrightarrow{BA} + r \cdot \overrightarrow{BC} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} = -\frac{r}{p} \cdot \overrightarrow{BC}$$

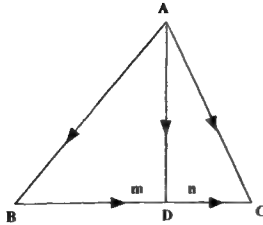
وهو الشرط اللازم لوقوع النقط الثلاثة  $(A, B, C)$  على استقامة واحدة

(٧) نظرية إذا قسمت قاعدة المثلث  $(A B C)$  في نقطة  $D$  بنسبة  $\frac{m}{n}$  فأثبت أن

$$m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{AB} = (m + n) \overrightarrow{AD}$$

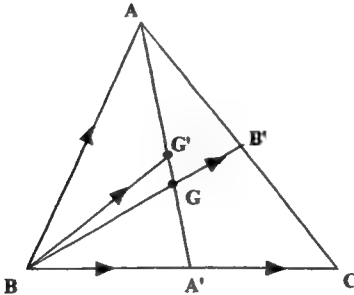
الحل

$$\begin{aligned} & m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= m \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + n \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) \\ &= (m + n) \overrightarrow{AD} + (m \cdot \overrightarrow{DC} + n \cdot \overrightarrow{DB}) \\ &= (m + n) \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$



والقوس الأخير اختفى بسبب تقسيم القاعدة بالنسبة  $\frac{m}{n}$

(٣) أثبت أن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم كلا منها بنسبة ١ : ٢ :



الحل:

لنفرض أن  $AA'$  ،  $BB'$  مستقيمان متوسطان في المثلث  $A B C$  تلاقيا في  $G$ . إن لم تقسم  $G$  المستقيم  $AA'$  بالنسبة ١ : ٢ لنفرض أن أخرى  $G'$  تقسمه بنسبة ١ : ٢ :

بتطبيق نتيجة النظرية (٢) على كل من المثلثين  $AA'B$  ،  $ABC$  على الترتيب نحصل على:

$$1.\overline{BA} + 2.\overline{BA'} = (1+2).\overline{BG'}$$

$$1.\overline{BA} + 1.\overline{BC'} = (1+1).\overline{BB'}$$

ومن المعادلة الأولى

$$\overline{BA} + \overline{BC} = 3.\overline{BG'}$$

ومن المعادلة الثانية

$$\overline{BA} + \overline{BC} = 2.\overline{BB'}$$

$$\therefore 3.\overline{BG'} = 2.\overline{BB'}$$

$$\therefore \overline{BB'} = \frac{3}{2}\overline{BG'}$$

وهذه تعني انطبق الاتجاه  $\overline{BB'}$  على الاتجاه  $\overline{BG'}$  وأن مقدار الأول يساوي مرة ونصف مقدار الأخير وعليه فالنقطة  $G'$  تقع على  $G$  وتقسم  $AA'$  بنسبة ٢ : ١

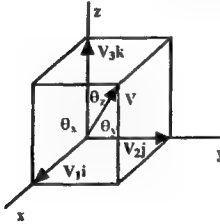
ويمكن التعميم على المستقيم المتوسط الثالث  $\overline{CC'}$  وهذا يثبت المطلوب.

## ٨ - الوحدات المتجهة الأساسية (i,j,k) :

هى وحدات منطقة على المحاور الكارتيزية المتعامدة (x,y,z) بحيث تنطبق الوحدة المتجهة i على المحور x وفى اتجاهه الموجب والوحدة المتجهة j تقع على المحور y وفى اتجاهه الموجب والوحدة المتجهة k على المحور z وفى اتجاهه الموجب وتخضع اتجاهات المحاور (x,y,z) وأيضا الوحدات المتجهة (i,j,k) لقاعدة البرمجة اليمينية أى أن الانتقال من المحور (+x) الى المحور (+y) يحدث انتقالاً للبرمجة اليمينية الموازية لمحور z فى الاتجاه الموجب له

وإذا كان لدينا متجه V له مركبات ثلاث (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>) فى اتجاه المحاور الكارتيزية (x,y,z) على الترتيب فإنه من الممكن التعبير عن المتجه V بالمعادلة الاتجاهية الآتية

$$V = V_1 i + V_2 j + V_3 k$$



وفيهما المقادير الثلاث (V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>) كميات قياسية وتعنى بالمعادلة أن المتجه V هو محصلة متجهات ثلاثة V<sub>1</sub> i فى الاتجاه x , V<sub>2</sub> j فى الاتجاه y , V<sub>3</sub> k فى الاتجاه z وهذه طريقته يسره للتعبير عن المتجه بدلالة مركباته القياسية

وإذا استعملت الاتجاهات l, m, n بدلالة جيب

تمام الاتجاهات ينتج

$$l = \cos \theta_x, \quad m = \cos \theta_y, \quad n = \cos \theta_z$$

وتكتب المركبات المتجهة كما يلى

$$V_x = lV, \quad V_y = mV, \quad V_z = nV$$

حيث أن

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

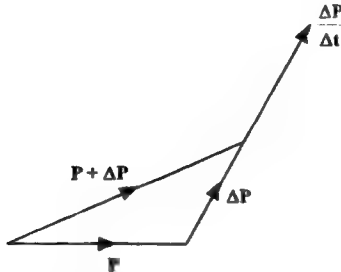
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

## ٩ - تفاضل المتجه بالنسبة للزمن

إذا أعطى المتجه المتغير  $R$  كدالة في الزمن  $t$  (وهو كمية قياسية) من مفاضلة دالة المتجه بالنسبة إلى الزمن كما تفاضل الدوال العادية نظرًا لأن قسمة كمية متجهة  $P$  على كمية قياسية  $\Delta t$  لن يغير من اتجاه المتجه  $\Delta P$  بل من مقداره فقط (شكل ١ - ١٢).

وبأخذ نهاية المقدار  $\frac{\Delta P}{\Delta t}$  عندما تقرب  $\Delta t$  من الصفر نحصل على المعامل التفاضلي  $\frac{dP}{dt}$  وهي

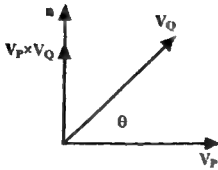
كمية متجهة



وتسري القواعد الأساسية لتفاضل الدوال القياسية على تفاضل الدوال المتجهة إلى متغير قياسي.



## ١٠ - الضرب الاتجاهي لتجهين :



حاصل الضرب الاتجاهي لتجهين  $V_P$  ،  $V_Q$  باتجاه ثابت عمودي على كل من التجهين و مقداره يساوي مقدار  $V_P$  في مقدار  $V_Q$  في جيب الزاوية بينهما . و يرمز لحاصل الضرب الاتجاهي بالرمز  $(V_P \times V_Q)$  أي أن

$$(V_P \times V_Q) = V_P V_Q \sin \theta n$$

فيها  $n$  وحدة متجه عمودي على التجهين تؤلف معهما

ثلاثاً يمينا كما في الشكل و بناء على هذا فإن قانون التبادل لا يسري على الضرب الاتجاهي فتغير ترتيب التجهين يغير سهم النتيجة .

$$(V_P \times V_Q) = - (V_Q \times V_P)$$

و فيما لتعريف حاصل الضرب الاتجاهي لتجهين يمكن كتابة النتائج الآتية لضرب الوحدات المتجهة الرئيسة ضرب اتجاهياً

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k , j \times k = i , k \times i = j$$

## ١١ - الضرب القياسي لتجهين :

يعرف حاصل الضرب القياسي لتجهين  $V_P$  ،  $V_Q$  بأنه الكمية القياسية الناتجة من ضرب مقدار الأولى في مقدار الثانية في جيب تمام الزاوية بينهما . أو بعبارة أخرى حاصل ضرب أحدهما في مسقط الآخر عليه . و يرمز لحاصل الضرب بالرمز  $V_P \cdot V_Q$

$$V_P \cdot V_Q = V_P \cdot V_Q \cos \theta$$

و يطبق الضرب القياسي لتجهين في تعريف الشغل فإن الشغل المبذول لقوة  $F$  انتقلت نقطة تأثيرها انتقال صغير  $\Delta S$  بحاصل ضرب مقدار القوة  $F$  في مقدار  $\Delta S$  في جيب تمام الزاوية بينهما و يكون الشغل الصغير  $\Delta W$

$$\Delta W = F \cdot \Delta S \cos \theta$$

و من هنا يتضح تطبيق قانون التبادل و التوزيع على الصورتين

$$\begin{aligned} V_P \cdot V_Q &= V_Q \cdot V_P \\ V_P (V_Q + R) &= V_P \cdot V_Q + V_P \cdot R \end{aligned}$$

و المعادلة الأخيرة المعيرة عن قانون التوزيع ليست إلا صورة لقانون الإسقاط . فمسقط محصلة  $V_Q, R$  على  $V_P$  يساوي مجموع مسقطي  $V_Q$  على  $V_P, R$  على  $V_P$ .

و للحصول على ناتج الضرب القياسي لتجهين  $V_P, V_Q$  بدلالة مركباتهما تتبع طريقة الوحدات المتجهة الأساسية  $i, j, k$  السابق شرحها من قبل . يمكن التعبير عن التجهين  $V_P, V_Q$  بدلالة مركباتهما و الوحدات المتجهة الأساسية على الوجه الآتي :

$$\begin{aligned} V_P &= V_{P_1} i + V_{P_2} j + V_{P_3} k \\ V_Q &= V_{Q_1} i + V_{Q_2} j + V_{Q_3} k \end{aligned}$$

و فيها  $(V_{P_1}, V_{P_2}, V_{P_3})$  هي مركبات المتجه  $V_P$  في اتجاهات المحاور الكارتيذية المتعامدة  $(x, y, z)$  و كذلك بالنسبة الى  $V_Q$  . و تبعا لتعريف حاصل الضرب القياسي لتجهين يمكن كتابة النتائج الآتية لضرب الوحدات المتجهة الأساسية ضرب قياسي :

$$i i = j j = k k = 1$$

$$j i = j k = k i = 0$$

## أمثلة محلولة

مثال ١ :

أوجد تحليلًا محصلة متجهات

$$\underline{a} = (10, 30^\circ), \underline{b} = (30, 60^\circ), \underline{c} = (10, 210^\circ)$$

الحل

بكتابة كل متجه بدلالة مركبيه

$$a_x = 10 \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}, \quad a_y = 10 \sin 30^\circ = 5$$

$$b_x = 30 \cos 60^\circ = 15, \quad b_y = 30 \sin 60^\circ = 15\sqrt{3}$$

$$c_x = 10 \cos 210^\circ = -5\sqrt{3}, \quad c_y = 10 \sin 210^\circ = -5$$

$$\underline{a} = 5\sqrt{3} \mathbf{i} + 5 \mathbf{j}$$

$$\underline{b} = 15 \mathbf{i} + 15\sqrt{3} \mathbf{j}$$

$$\underline{c} = -5\sqrt{3} \mathbf{i} - 5 \mathbf{j}$$

$$\underline{R} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c}$$

$$= (5\sqrt{3} + 15 - 5\sqrt{3}) \mathbf{i} + (5 + 15\sqrt{3} - 5) \mathbf{j}$$

$$= 15 \mathbf{i} + 15\sqrt{3} \mathbf{j}$$

$$\therefore |\underline{R}| = \sqrt{(15)^2 + (15\sqrt{3})^2} = 30$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \therefore \theta = 60^\circ, \underline{R} = (30, 60^\circ)$$

مثال (٢)

إذا كان

$$\underline{a} = -3 \mathbf{i} - 2 \mathbf{j}, \quad \underline{b} = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}, \quad \underline{c} = \sqrt{3} \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 5\mathbf{c} \quad \text{أوجد المجه}$$

الحل

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= +2(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + 3(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 5(\sqrt{3}\mathbf{j} + \mathbf{j}) \\ &= -5\sqrt{3}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\therefore R = \sqrt{(-5\sqrt{3})^2 + 0} = 5\sqrt{3}$$

$$\tan \theta = \frac{0}{-5\sqrt{3}} = 0 \quad \therefore \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \mathbf{R} = (5\sqrt{3}, 180^\circ)$$

مثال (٣) اذا كان .

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \quad \text{أوجد } \mathbf{R} \text{ حيث}$$

الحل:

$$\mathbf{R} = (2 + 2 - 1)\mathbf{i} + (5 + 1 - 2)\mathbf{j} + (8 + 2 + 2)\mathbf{k}$$

$$= 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

$$\therefore R = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (12)^2} = 13$$

$$\cos \alpha_R = \frac{3}{13}, \cos \beta_R = \frac{4}{13}, \cos \gamma_R = \frac{12}{13}$$

### مثال (4)

إذا كان

$$\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

أوجد المتجه  $\mathbf{R} = 2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$

الحل

$$\mathbf{R} = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$\therefore \mathbf{R} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

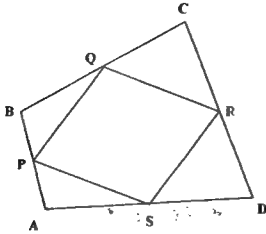
$$R = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos \alpha_R = \frac{5}{\sqrt{30}}, \cos \beta_R = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \cos \gamma_R = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

### مثال (5)

أثبت أنه إذا وصلت نقاط منتصفات الأضلاع المجاورة لأي شكل رباعي بخطوط مستقيمة فإن الشكل الرباعي الناتج يكون متوازي أضلاع.

الحل:



ليكن الشكل الرباعي المعطى  
 $ABCD$  بنقط منتصفات الأضلاع  
 المتجاورة هي  $S, R, Q, P$  كما  
 بالشكل بالنظر إلى الشكل يتج  
 الآتي

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \frac{1}{2} \vec{AC} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}) \dots \dots \dots (1)\end{aligned}$$

وبالمثل :

$$\vec{QR} = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{CD}) \dots \dots \dots (2)$$

$$\vec{RS} = \frac{1}{2} (\vec{CD} + \vec{DA}) \dots \dots \dots (3)$$

$$\vec{SP} = \frac{1}{2} (\vec{DA} + \vec{AB}) \dots \dots \dots (4)$$

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ثم المعادلتين (٢) ، (٤) مع مراعاة أنه  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

$$\vec{PQ} + \vec{RS} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) = \vec{0}$$

$$\vec{QR} + \vec{SP} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) = \vec{0}$$

$$\therefore \vec{PQ} = -\vec{RS} , \vec{QR} = -\vec{SP}$$

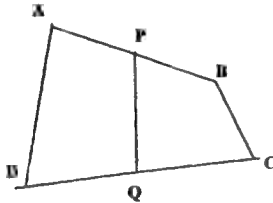
$$\vec{PQ} = \vec{SR} , \vec{QR} = \vec{PS}$$

أو

وهذا يعني أنه في الشكل الرباعي PQRS كل ضلعين متقابلين متساويين ومتوازيين أي أنه متوازي أضلاع.

مثال (٦)

في الشكل الرباعي ABCD .. إذا كانت نقطة P هي نقطة منتصف AB ونقطة Q هي منتصف CD .. أثبت أن  $\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{PQ}$



الحل

واضح من الشكل أنه

$$\vec{AD} = \vec{AQ} + \vec{QD}$$

$$\vec{BC} = \vec{BQ} + \vec{QC}$$

وبالجمع ينتج أن

$$\vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AQ} + \vec{BQ} + \vec{QD} + \vec{QC}$$

حيث أنه Q هي منتصف DC

$$\therefore \vec{QD} = -\vec{QC}$$

$$\therefore \vec{AD} + \vec{BC} = \vec{AQ} + \vec{BQ}$$

وحيث أن P هي منتصف AB

$$\therefore \vec{AQ} + \vec{BQ} = 2\vec{PQ}$$

وهذا يعني أنه

$$\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{PQ}$$

وهو المطلوب اثباته

مثال (٧)

أوجد قيمة  $\mu$  لكي يكون المتجهان الآتيان متعامدين

$$\underline{a} = 2\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\underline{b} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mu\mathbf{k}$$

الحل

بما أن شرط تعامد المتجهين هو

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$$

وهذا يعني أن

$$2(4) + (\mu)(-2) + (1)(-2\mu) = 0$$

$$8 - 2\mu - 2\mu = 0$$



ومنها  $\mu = 2$

مثال (٨)

بين أن المتجهات

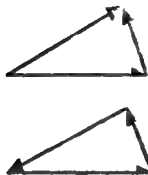
$$\underline{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\underline{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\underline{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

تكون مثلثا قائم الزاوية

الحل



المتجهات  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$  ستكون مثلثا إذا كان

أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين

أو مجموع المتجهات الثلاثة = صفر

بالمجاورة سنجد أن

$$\underline{a} = \underline{b} + \underline{c}$$

∴ المتجهات ستكون مثلثا .. ولإثبات أنه قائم الزاوية نحسب حاصل الضرب القياسي

للمتجهات متى متى ينتج أن

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (3)(1) + (-2)(-3) + (1)(5) \neq 0$$

$$\underline{b} \cdot \underline{c} = (1)(2) + (-3)(1) + (5)(-4) \neq 0$$

$$c \cdot a = (2) (3) + (1) (-2) + (-4) (1) = 0$$

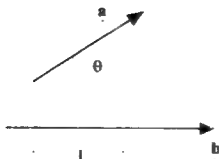
∴ في المثلث الناتج يكون المتجه  $a$  عموديا على المتجه  $c$  أي أن المتجهات المعطاة تكون متلصا

قائم الزاوية.

## تطبيقات لحاصل الضرب القياسي لمتجهين

ولحاصل الضرب القياسي لمتجهين تطبيقات عديدة نذكر منها

### (أ) إيجاد مسقط متجه $a$ على آخر $b$



نفرض أن مسقط  $a$  على  $b$  هو  $l$  حيث

$$l = a \cos \theta$$

$$= a \cdot 1 \cos \theta$$

$$\therefore l = a \cdot b$$

وهذا يعني أن طول مسقط المتجه  $a$  على المتجه  $b$

يقدر بحاصل الضرب القياسي للمتجه  $a$  في متجه الوحدة  $\hat{b}$  للمتجه  $b$

مثال (٩)

أوجد مسقط المتجه

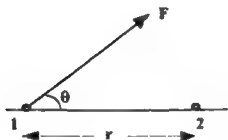
$$a = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$b = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k} \quad \text{على المتجه}$$

$$l = \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a} \cdot \frac{\underline{b}}{b}$$

$$= (i - 2j + k) \cdot \left( \frac{4i - 4j + k}{\sqrt{16 + 16 + 49}} \right)$$

$$= (1)\left(\frac{4}{9}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{9}\right) + (1)\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{19}{9}$$



### الشغل قوة F بين موضعين

معروف أنه للقوة الثابتة المقدار  $\underline{F}$  المؤثرة على

نقطة مادية يكون الشغل المبذول بـ  $\underline{F}$  لتحريك النقطة

بين : موضعين هو (١) ، (٢) البعد بينهما  $r$  هو

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= F r \cos \theta \\ &= \underline{F} \cdot \underline{r} \end{aligned}$$

مثال (١٠)

أوجد الشغل المبذول بالقليحة

$$\underline{F} = 2i - j - k$$

$$\underline{r} = 3i + 2j - 5k \text{ على طول المتجه}$$

الحل

$$W = \underline{F} \cdot \underline{r}$$

$$= (2 \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k})$$

$$= (2) (3) + (-1) (2) + (-1) (-5)$$

$$= 9 \text{ N.m}$$

ويتضح من هذا المثال أن شغل قوة  $\mathbf{F}$  مركباتها  $F_x$  ،  $F_y$  ،  $F_z$  تنتقل نقطة تأثيرها انتقالاً صغيراً  $r$  مركباته  $x, y, z$  يساوي المجموع الجبري لشغل مركب . القوة .. ويعني ذلك أن

$$W = F_x \cdot x + F_y \cdot y + F_z \cdot z$$

## التعاريف و القوانين الأساسية

كما سبق لنا أن علم الاستاتيكا هو علم دراسة الأجسام المادية تحت تأثير الإتران من حيث مكون مستمر أو حركة منتظمة في خط مستقيم و أيضا الحركة الدورانية المنتظمة لجسم متماسك حول محور حر و لذا يجب التعرف على أسس علم الاستاتيكا و التي تشمل بعض التعاريف و القوانين الأساسية .

### ١ - التعاريف الأولية في علم الإستاتيكا:

- أ - الجسم: هو جسم تضاعلت أبعاده بحيث يمكن تمثيله بنقطه هندسية.
- ب - الجسم المتناسك: هو الجسم الذي يمكن إهمال ما يطرأ على شكله من تغيرات في الدراسة المعنى ، وبذلك تعتبر أبعاده وحجمه ثابتة ؛ ويمثل بشكل هندسي ثابت.
- ج - الجسم المرن: وهو الجسم الذي تتناسب التغيرات المستحدثه فيه والعوامل المؤثره (القصوره) وفقا لقانون هوك (Hook) للتوسع في دراسة الأجسام المرنة موكول إلى نظريات المرونه . (Theorn of Elasticity)
- د - الجسم المائع المثالي: يفترض فيه إندعام المقاومه للقوى المماسه للأسطح الداخليه والخارجيه (قوى القص وقوى الشد السطحي) ؛ ولذا فهو لا يتخذ شكل معين فتتبع العلاقة بين الضغط والحجم قانون بويل ( Boyel ) ، أو قانون شارل ( Charles ) حسب الأطوال.

هـ - الإنتشار المتقطع والإنتشار المتواصل: إستاتيكا فإنه يمكن اعتبار الأجسام مجموعات من الجسيمات وعندئذ تستعمل علامة  $\Sigma$  ( Sigma ) للدلالة على مجموع عدد منها.

فيحبر عن مجموع عدد من الجسيمات  $m_i$  يكتب:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

أما الجسم المتواصل الإنتشار فيحبر عن جزء متناهي في الصغر منه برمز التفاضل (dm) ولتجميعه برمز التكامل (  $\int$  ) ، وصورة الإنتشار المتواصل هي المستعمله في الأجسام المرنة والأجسام المائعة.

والإنتشار المتواصل نوعين ؛ إما متجانس ( Homogeneity ) وذلك إذا كانت الكثافة للإنتشار ثابتة ، وآخر غير متجانس ( Non-Homogeneous أو Heterogeneous ) في حالة عدم توافر تلك الخاصية.

والأجسام وفقا لثبوت صفات التكوين الخريسي في الإتجاهات المختلفه من عدمه تنقسم إلى متماثلة التكوين ( Isotropic ) وغير متماثلة التكوين ( Non-Isotropic ) ، فمثلا الخشب تختلف صفاته في إتجاه الألياف عنها في الإتجاه العمودي على الألياف فهو غير متماثل التكوين.

و - القوة: هي العامل الرئيسي في الإمتاتيكا ويمكن تعريفها بأنها المدرك الحسي من نوع الشد أو الضغط الذي يعمل على تغير حالة الحركة أو السكون للأجسام مالم يتوازن أو يتلاشى تأثيره بفعل عوامل أخرى من نوعه وهي إما مركبة أو موزعة على الأجسام بانتظام.

ونقل رياضيا باتجاهات ذات خطوط عمل محدد Sliding vectors. أو Line-bound vectors ؛ وذلك للدلالة على إمكان نقلها على خط العمل نفسه دون تغير في تأثيرها على الجسم المتماصك ، وقد خصصنا بابا على عمليات تركيب وتحليل الاتجاهات المعينه بخط عمل سواء بالطريقه البيانيه Graphical Method أو الطرق التحليليه Analytical Methods .

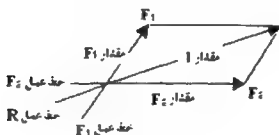
ويمكن قياس مقدار القوة بما تحدثه من إزاحته في زنبرك معاير ومقارنة مقادير القوى المختلفة على هذا الأساس.

ز - الكتلة: هي الصفه الميكانيكيه للأجسام الماديه التي تعبر عن خاصية القصور الذاتي ( Inertia ) ، أي مقاومة التغير في الحركه . وليست لها أهميه تذكر في الإستاتيكا العاديه عن أنها صفه رقميه للأجسام تتناسب مع أوزانها في المكان الواحد على سطح الأرض . ولكنها تلعب الدور الرئيسي في الديناميكا عموما وفي إستاتيكا المتحركات.

## ٢ - القوانين الأساسية:

### أ - قانون تركيب وتحليل القوى:

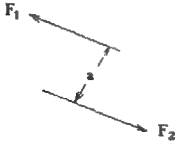
ويعرف بقانون متوازي الأضلاع للقوى وينص على أنه إذا أثرت قوتان على جسم أو على جسم متماسك فإن تأثيرهما يعادل تأثير قوة واحده تسمى المحصله ( Resultant ) تعمل على قطر متوازي الأضلاع المكون من القوتين كما في الشكل (٢-١) ، ويلاحظ أنقاء خطوط العمل في نقطه واحده وأن الإتجاهات تبعث من هذه النقطه والعكس صحيح أي أن R يمكن إستبدالها بالقوتين  $F_1$  و  $F_2$ .



شكل (٢-١)

وهناك قانون عام في التركيب والتحليل (أو التجميع) ( General Law of Sperposition ) وينص على أن تأثير المركب مجموعه من القوى تعمل في وقت واحد يعادل المجموع 'الإتجاهي للتأثيرات' الفرديه 'النتجه عن كل من القوى على حده.

وهذا يعني أنه إذا ركبت مجموعه من القوى إلى المحصلة  $R_1$  وركبت مجموعه أخرى  $R_2$  وكانت  $R_1 = R_2$  وعلى نفس خط العمل فيقال أن المجموعتين متكافئتان أي أن تأثيرهما واحد على الجسم المتماثل مهما اختلفت تفاصيل كل من المجموعتين.



شكل (٢-٢)

أما إذا كانتا قوتين متوازيتين متساويتين في المقدار متضادتين في الاتجاه فغسل نظرية أو عملية التركيب وينتج ما يسمى بالإزدواج ، وتأثيره دوراني على الجسم المتماثل لذا يسمى عزم الدوران (

Moment) ويرمز له بهم دائري  $M$  مع إظهار اتجاه الدوران ويقدر بحاصل ضرب إحدى القوتين في الفروع العمودي  $a$   $M = F \cdot a$  شكل (٢-٢) .

وبتكافؤ إزدواجان إذا كانا في مستويين متوازيين وكان لهما نفس المقدار (حاصل الضرب) ونفس الاتجاه الدوراني ويتم تركيب العزوم الدورانية في مستوى واحد بجمع مقاديرها جبرياً.

### ب - قانون التوازن:

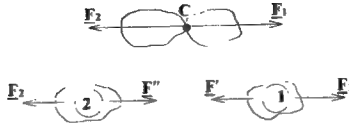
وبعني أن الجسم المتماثل يظل على حاله من حركة أو سكون إذا تلاشت محصلة القوى المؤثرة عليه وعلى الأخص إذا أثرت فيه قوتان متساويتان ومتضادتان في الاتجاه على خط واحد أو إذا أثر فيه عزم دوران متساويان في المقدار ومتضادان في الاتجاه كما في الشكل (٢-٣) .



شكل (٢-٣)

ولاستنتاج قانون رد الفعل لجسمين مثلاً متلاصقين أو جزئين من جسم متماثل مفصولين بسطح وهي كما في الشكل (٢-٤) .



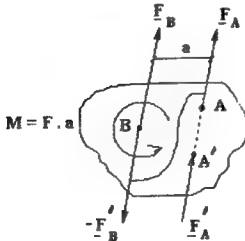


شكل (٤-٧)

$$\begin{aligned} F_2 + F'' &= 0 & F_1 + F' + F'' + F_2 &= 0 \\ F_1 + F' &= 0 & F'' &= -F' \\ F'' + F' &= 0 \\ F_1 + F_2 &= 0 \end{aligned}$$

وبذلك فإن القوى ( الفعل ) المؤثرة على الجسم (١) عند نقطة التماس ، تساوي القوى (رد الفعل)  $F''$  المؤثرة على الجسم (٢) في نفس النقطة كما في شكل (٤-٧).

ويعبر هذا القانون عن أن القوى في الطبيعة تظهر إزدواجها بحيث يكون لكل فعل رد فعل مساوي له في المقدار ومضاد له في الاتجاه . كما يعبر عن توازن القوى الداخلية بجسم متماسك بحيث لا تغير من حالة حركته أو سكونه ، ولابد من تواجد قوى خارجيه لإحداث التغيير.



شكل (٥-٧)

### ٣ - نقل القوى:

إذا أثرت قوة  $F_A$  على جسم متماسك في نقطة A فإنه في الإمكان نقلها كما نشاء على خط العمل نفسه المار بنقطة A ( إلى نقطة A' ) دون أدنى تغيير في التأثير وذلك مع الاحتفاظ بالمقدار بطبيعة الحال.

$$F_A = F'_A$$

ولإيجاد ما يسفر عنه نقل القوة بنفس المقدار من A إلى B نتصور قوتين متساويتين ومتضادتين في B على خط عمل موازي للقوة  $F_A$  وكل منهما مساوي لما من حيث المقدار.

هاتان القوتان يتلاشى تأثيرهما على الجسم التماسك فيتبين على الفور أن  $F_A$  تعادل أو تكافئ  $F_B$  مضافا إليها الازدواج المكون من  $F_A$  ،  $F_B$  كما في الشكل (٥ - ٧)

والنتيجة هي أنه إذا نقلت قوة ما موازية لنفسها من خط عمل إلى خط عمل آخر فإنه يلزم إضافة عزم دوران يساوي حاصل ضرب القوة في المسافة العمودية على خطي العمل مع مراعاة اتجاه الدوران شكل (٥-٧).

$$F_A = F_B \quad , \quad M = F \cdot z$$

## عمليات تركيب وتحليل القوى

### أولاً: عمليات تركيب القوى:

#### ١ - تركيب القوى الملحقية:

إنّ إن أي جسم بإعتباره نقطة مادية فإن القوى المؤثرة عليه تلحق جميعاً في تلك النقطة. ولما كانت محصلة أي قوتين تمر بنقطة تلاقيهما تما لقاعده متوازي أضلاع القوى فإن محصلة مجموعته من القوى الملحقية تمر بنقطة تلاقيهما وبذا يبقى حسابها فقط تعين مقدار وميل المحصلة ، وللدراسة الإستاتيكية هناك طريقتان متميزتان:-

#### أ - الإستاتيكا البيانية:

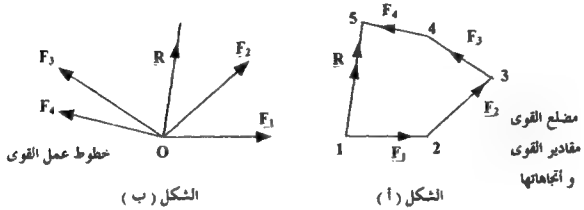
وهي تعتمد على الرسم والتخطيط بقياس رسم مناسب ، ويعنى المهندسون بدراسة وتطوير هذا النوع من الإستاتيكا ويرجع الفضل إليهم في إبتكار الكثير من طرقها وتطبيقاتها في هندسة الإنشاءات.

#### ب - الإستاتيكا التحليلية:

وهي تعتمد على التحليل والحساب ، وتستيع كلا الطريقتين فيما يلي.

## أ - الطريقة البيانية:

في حالة تركيب مجموعه من القوى ( $F_1, F_2, F_3, F_4$ ) كما في الشكل (١-٣ أ، ب) نرسم مضلع متجهات القوى بمقياس رسم مناسب ونصل نقطة البدايه بنقطة النهايه فنحصل على المحصله  $R$  مقداراً واتجهاً.



شكل (١-٣)

في حالة وقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه قبل أن المضلع مقفل وتلاشى في هذه الحاله محصله القوى  $R$  وهو شرط إتران هذه القوى ، وعلى هذا فالشرط البياني لتلاشي محصله مجموعه من القوى المتلقيه هو أن يكون مضلع القوى مقفلاً.

## ب - الطريقة التحليليه:

وتبنى على تحليل القوى في إتجاهين ، الأفقي والرأسي ثم جمع المركبات في كل إتجاه على حده جمعاً جبرياً ثم إعادة التركيب للحصول على المحصله.

بفرض أن القوى  $F_1, F_2, F_3$  وزوايا ميلها على الأفقي  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  على الترتيب فإن المحصله في الإتجاه الأفقي تكون  $R_x$  تساوي مجموع المركبات الأفقيه للقوى المطاه:

والمحصلة في الاتجاه الرأسى  $R_y$  تساوي مجموع المركبات الرأسية للقوى المعطاه:

$$\therefore R_y = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 + \dots \dots \dots (2)$$

وتعتبر المعادلتان ١ ، ٢ معبرتان عن أن مسقط المحصلة  $R$  على كل من المحورين  $x$  ,  $y$  يساوي مجموع المساقط الفردية ، وعلى ذلك فإننا نستطيع أن نحصل على مقدار المحصلة  $R$  وميلها على الأفقى  $\theta$  بجمع مركبتها جماعياً.

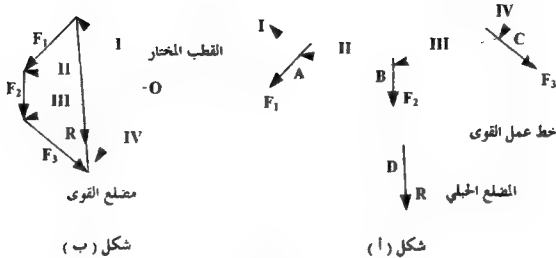
$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \dots \dots \dots (3)$$

$$\tan \theta = R_y / R_x \dots \dots \dots (4)$$

وخط عملها الحقيقي يمر بملتقى القوى المعطاه وعندما تكون:  $R_x = 0$  ,  $R_y = 0$  فبمعنى تلاشي محصلة القوى المتلقيه.

## ٢ - تركيب القوى المتفرقه:

في حالة القوى المتفرقه والمؤثره على جسم متماسك فإن مقدار وميل المحصلة  $R$  يتم الحصول عليها بالطريقه البيانیه أو التحليلیه بنفس الطريقه والخطوات للبند السابق لحالة القوى المتلقيه مع العلم أن خط عمل المحصلة في حالة القوى المتفرقه مجهولاً لعدم وجود نقطة لقاء مشتركة تمر بها المحصلة كحالة القوى المتلقيه وهو ما منبیه فيما يلي بالطريقتين المتبعين.



شكل ( ٢ - ٣ )

لإيجاد المحصلة  $R$  مقداراً واتجاهاً وخط عمل للقوى  $F_1$  ،  $F_2$  ،  $F_3$  الشفرقه يتم رسم مضلع القوى شكل ( ٢-٣ ب ) ثم يتم اختيار قطب المضلع  $O$  ونصل رؤوس القوى بتلك النقطة  $O$  فنحصل على القوى المساعدة  $I$  ،  $II$  ،  $III$  ،  $IV$  يختار خط عمل مناسب للقوى المساعدة  $I$  يقطع خط عمل  $F_1$  في نقطة  $A$  للحصول على بداية المضلع الجلي شكل ( ٢-٣ أ ) ، وبما أن (  $II = F_1 + I$  ) فإن خط عمل  $II$  يرسم موازياً لها من  $A$  فيقطع  $F_2$  في  $B$  ، وكذلك (  $III = F_2 + II$  ) ويرسم خط عمل  $III$  موازياً لها فيقطع  $F_3$  . وهكذا نوجد خط عمل القوى المساعدة الأخيرة .  $IV$  ويسمى المضلع المكون من خطوط العمل  $I$  ،  $II$  ،  $III$  ،  $IV$  في شكل ( ٢-٣ أ ) بالمضلع الجلي.

$$\therefore IV = I + F_1 + F_2 + F_3 \dots \dots \dots (5)$$

$$\therefore IV - I = F_1 + F_2 + F_3 \dots \dots \dots (6)$$

أي أن مجموعة القوى المعطاه  $F_1$  ،  $F_2$  ،  $F_3$  تكافئ القوتين  $I$  ،  $IV$  المثلتين بالضلعين الأول والآخر في المضلع الجلي . وعلى هذا فإن المحصلة تمر بنقطة  $D$  في المضلع الجلي ونقطة تلاقي الضلعين الأول والآخر . نرسم من  $D$  موازياً للمحصلة  $R$  فنحصل على خط عمل هذه المحصلة.

نلاحظ في الشكل ( ٢-٣ ) العلاقات الهندسية الآتية بين شكل مضلع القوى وشكل خطوط العمل فكل مستقيم في الشكل الأول يناظره مستقيم موازي في الشكل الثاني كما أن كل مثلث في الأول يناظره ثلاثة مستقيمات متلاقية في نقطة في الثاني ، والأصل في هذا التناظر هو أن محصلة أي قوتين يجب أن تمر بنقطة تلاقيهما.

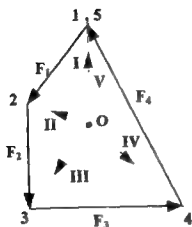
وتسمى عملية تركيب القوى بعملية الإختزال ، وقد تسفر هذه العملية عن أحد الإحتمالات الثلاثة الآتية للنتيجة.

### أ - مضلع القوى المفتوح:

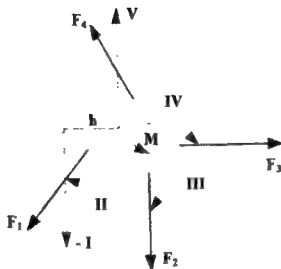
يعني أنه لمجموعه من القوى محصله ذات مقدار واتجاه ويحدد خط عملها بواسطة المضلع الحلي وأن عملية الإختزال تقضي إلى قوة المحصله.

### ب - مضلع القوى مقفل والمضلع الحلي مفتوح:

بوقوع نقطة البدايه على نقطة النهايه في مضلع القوى كانت المحصله صفرا ، والشعاعان I , V الأول والأخير إنطبقا في مضلع القوى شكل ( ٣-٣ ، أ ، ب ) مكونين مضلع حلي مفتوح ، وجعلا الضلعين الأول والأخير فيه I , V متوازيين. وهما بمثابة قوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه وتكافئان مجموعة القوى المعطاه تبعاً للمعادله (6).



مضلع القوى مغلق



المضلع الحيلي مفتوح

شكل ( ٣ - ٣ )

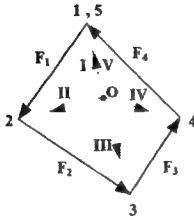
ولذا فإن المحصلة عبارة عن عزم إزدواج يقدر بحاصل ضرب مقدار القوة  $V$  بمقاسه من مضلع القوى في المسافة العمودية  $h$  بين  $V$  ,  $I$  بمقاسه من المضلع الحيلي مع مراعاة مقياس الرسم لكل من الشكلين.

$$M = |V| \times h$$

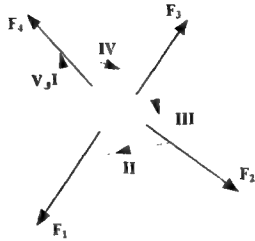
ج - مضلع القوى مغلق والمضلع الحيلي مغلق:

إذا كان وضع القوى الأخير والأول  $V$  ,  $I$  في المضلع الحيلي مغلقاً على استقامه واحده فإن المحصلة تتلاشى نظراً لأن القوتان متساويتين في المقدار ومتطادتين في الاتجاه وهما متكافئتان مجموعة القوى المعطاه تبعاً للمعادلة (6) أي أن المجموعه متلاشيه . شكل (٣-٤)





مضلع القوى مغلق



المضلع الحلي مغلق

شكل (٤-٣)

### الخلاصة:

- ١ ) مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها قوة مفردة وعلامة ذلك مضلع القوى مفتوحاً.
- ٢ ) مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها إزدواجاً ، وعلامة ذلك مضلع القوى مغلقاً والمضلع الحلي مفتوحاً.
- ٣ ) مجموعة القوى المتفرقة تكون محصلتها متلاشي وعلامة ذلك مضلع القوى والمضلع الحلي مغلقاً وهي حالة التوازن التي تحقق إتزان للجسم المتماسك.

### ب - الطريقة التحليلية:

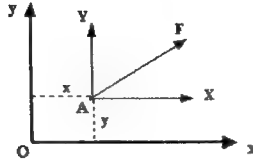
يتعين مقدار وميل المحصلة للقوى المتفرقة بالمعادلتين:

$$|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad , \quad \tan \theta = R_y/R_x$$

أما خط عماها فبتعين بقانون العزوم والذي ينص على أن " مجموع عزوم مجموعة من القوى حول أي نقطة يساوي عزوم محصلتها حول نفس النقطة " ، وذلك لأن المحصلة تكافئ مجموعة القوى في قدرتها على إحداث الدوران.

## عزم قوة F حول نقطة الأصل O :

بفرض أن مركبتي القوة في إتجاهي المحورين الأفقي والرأسي هما ( X,Y ) ونقطة تأثير القوة A إحداثياتها هي ( x , y ) وهي نقطة عامه على القوة نظراً لأن القوة المؤثرة على جسم متماسك متجه مقيد بخط عمل فقط وتستطيع الإنزلاق على الخط شكل (٥-٣).



شكل (٣-٥)

تبعاً لنظرية العزوم  
يمكن أخذ العزوم  
للمركبتين حول O بدلاً  
من عزم القوة F ذاتها  
للحصول على  $M_o$ .

$$M_o = x \cdot Y - y \cdot X$$

ويمكن وصفها على

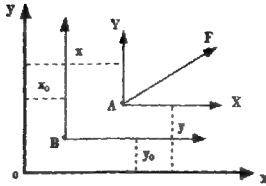
صوره عدده على النحو التالي:

$$M_o = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{احداثي نقطة تأثير القوة} \\ \leftarrow \text{مركبي القوة} \end{array} \quad (7)$$

حيث يكون الصف الأول عبارة عن إحداثي نقطة تأثير القوة والصف الثاني يمثل لمركبة القوة.

عزم القوة F حول نقطة B إحداثياتها (  $x_o, y_o$  ) :

حيث أن العزم المطلوب  $M_B$  تعطيه الخدده.



شكل (٦-٣)

$$M_B = \begin{vmatrix} (x-x_0) & (y-y_0) \\ X & Y \end{vmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

حيث أن  $(x, y)$  إحداثي نقطة التأثير،  $(X, Y)$  مركبي القوة

معادلة خط عمل المحصلة :

و بتجميع عزوم القوى حول نقطة الأصل O بالطريه السابقه و يرمز لهذا المجموع العددي بالرمز  $M_o$ . ثم بأخذ عزم المحصله حول O نحصل على:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ R_x & R_y \end{vmatrix} = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

حيث  $(R_x, R_y)$  مركبتا المحصله في الإتجاه الأفقي والرأسي المعطى بالمعادلتين (1)

(2) و  $(x, y)$  هما إحداثيا نقطه عامه على خط عمل المحصله وعلى هذا فإن:

$$M_o = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

والمعادله تمثل خطا مستقيما وهو خط عمل المحصله وأن ال  $R_x, R_y, M_o$  هي

عبارة عن قيم عدديه نتجت من عمليات التحليل الأفقي والرأسي وأخذ العزوم حول O .

و يمكن أن تؤدي عملية الإختزال إلى إحدى النتائج الآتيه:

١- وجود محصله فرديه R وذلك لعدم تلاشي مركبتها  $R_x, R_y$  أو إحداهما على الأقل .

٢ - المحصله عبارة عن إزدواج ويشروط لذلك:

$$R_x = 0, R_y = 0, \sum M_o \neq 0$$

٣- المحصلة متلاشيه ويشترط لذلك:

$$R_x = 0, R_y = 0, \sum M_o = 0$$

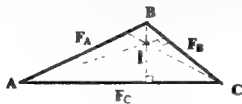
والحاله الأخيره هي حالة توازن القوى المؤثره على الجسم المتناسك. ويلاحظ أن عمليه إيجاد المحصله عباره عن تكوين معادلات تحليليه في ٣ مجاهيل وهي الكميات القياسيه التي تحدد فيها خط عمل . لتحديد  $R$  يلزم معرفة مقدار  $R$  وميلها  $\theta$  وتقاطعها مع أحد المحورين مثلا.

### ج - طرق تحليليه أخرى:

بدلا من الإسقاط على المحورين وأخذ العزوم حول نقطه كما تم في الطريقه السابقه يمكن الإسقاط على محور واحد وليكن  $x$  مثلا ثم إيجاد العزوم حول نقطتين معلومتين  $B, A$  وبذلك نحصل على ثلاث معادلات تحدد  $R$  مقدارا واتجاها وموضعا غير أنه يلزم إختيار  $B, A$  بحيث لا يكون الخط  $AB$  عموديا على  $x$  وذلك لتلافي الحاله التي قد تصادف بوجود  $R$  على الخط  $AB$  فتلاشي العزوم حول كل من  $B, A$  ، وإذا كان  $AB$  عموديا على  $x$  تلاشى أيضا مركبة  $R$  على  $x$  وبذلك لا نستطيع إيجاد  $R$ .

أيضا يمكن تحديد  $R$  بأخذ العزوم حول ثلاث نقط  $A, B, C$  ليست على إستقامه واحده وذلك لكي لا نعجز عن إيجاد  $R$  إذا أخذنا النقط الثلاث بالصدفه على خط عملها كما في

الشكل ( ٣-٧ )



شكل ( ٣ - ٧ )

$$M_o = F_A \cdot l$$

$$M_o = F_B \cdot l$$

$$M_o = F_C \cdot l$$

$$\therefore F_A \cdot l = F_B \cdot l = F_C \cdot l$$

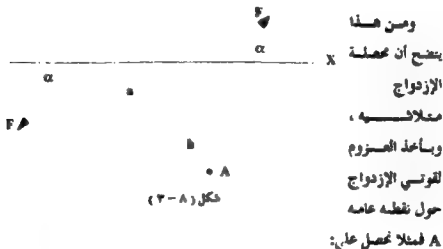
والاختيار بين طريقه وأخرى يتوقف على المسأله المطلوب حلها وحسن الاختيار للأقطاب لأخذ العزوم والمجاور للإسقاط بحيث تنشأ المعادلات السهله والبسيطه الحل من الناحيه الجبريه.

مع ملاحظة أنه إذا كانت محصلة المجموعه عبارة عن إزدواج أو عزم دوران فإن العزم يظهر ثابت حول مختلف الأقطاب أما إذا تلاشت المحصله فيتلانى العزم بطبيعة الحال حول جميع الأقطاب.

### ٣ - الإزدواج :

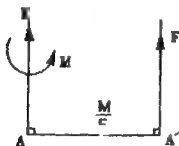
هو قوتان متوازيتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ، وبالتحليل في الاتجاه الأفقي والرأسي نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= F \cos \alpha - F \cos \alpha = 0 \\ R_y &= F \sin \alpha - F \sin \alpha = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$



$$M_A = F \cdot (a + b) - F \cdot b = F \cdot a = \text{constant} \dots \dots \dots (11)$$

ومن أهم خواص الإزدواج هو مقرته على إحداث الدوران ولذلك سوف نعمل الإزدواج بسهم دائري يكتب على عزمه الثابت الإزدواجات الواقعة في مستوى واحد تجمع عزومها مجعاً جبرياً للحصول على إزدواج محصل لها.



بمطى جمع قوة  $F_A$  وإزدواج  $M$  شكل (٣-٩) قوة موازيه ومساويه لذرونى  $F_A$  وعلى بعد منها

شكل (٣-٩)

يساوي خارج قسمة عزم الإزدواج على مقدار القوة. وذلك واضح من أن تحليل المجموعه الماره بنقطة A' يعطي نفس الشيء كتحليل المجموعه الماره بنقطة A كما أن عزوم كلى المجموعتين حول نقطة ما مثل A' يعطي نفس الشيء.

## ثانياً: عمليات تحليل القوى:

### ٤ - تحليل قوة R إلى مركبتين في خطي عمل معلومين (١) ، (٢):

#### أ - الطريقه البيانيه:



(أ)



(ب)



(١)

شكل (١٠-٣)

إنشاء متوازي أضلاع قوى يحتوي على R فطر فيه والتوتين ١ ، ٢ ضلعين متجاوري شكل (١٠-٣ ج) يتعين مقدار  $F_1, F_2$  كما يمكن الحصول عليها برسم مثلث القوى كما في الشكل (١٠-٣ ب).

#### ب - الطريقه التحليليه:

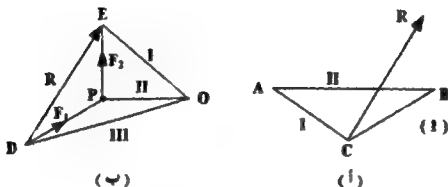
بالتحليل في اتجاه ١ والعمودي عليه نحصل على:

$$\left. \begin{aligned} F_1 + F_2 \cos \alpha &= R \cos \beta \\ F_2 \sin \alpha &= R \sin \beta \end{aligned} \right\}$$

هما معادلتان في مجهولين  $F_1, F_2$  يعطي حلها الجبري قيمتي المجهولين ، وبشرط إمكان التحليل في هذه الحاله النقاء خطي العمل 1 ، 2 والقوة R في نقطه واحده شكل (١٠-٣).

**٥ - تحليل قوة R إلى مركبتين بمعرفة خط عمل إحداهما (١) ونقطه A على خط عمل الأخرى:**

**١ - الطريقة البيانية:**



شكل (١١ - ٢)

نختار نقطة B على (١) وأي نقطة C على R فنحصل على مثلث ABC أضلاعه I, II, III كما في الشكل (١١ - ٢) نرسم بمقياس رسم مناسب شكل (١١ - ٣ ب) ، ونرسم من طرفها موازيين للخطين I, III فيلتقيان في O ثم من O نرسم موازيا للخط (I) ومن D موازيا للخط I فيلتقيان في P ، وبذلك نحصل على:

$$F_1 = DP , F_2 = PE$$

ولتحليل R إلى  $F_1 , F_2$  فهي عملية عكس الأجراء المتبع في تركيب القوى  $F_1 , F_2$  إلى محصلها R بطريقة المضلع الجلي ، ويستعان بالعلاقات المتبادلة بين مضلع القوى والمضلع الجلي في ضبط الإجراء.

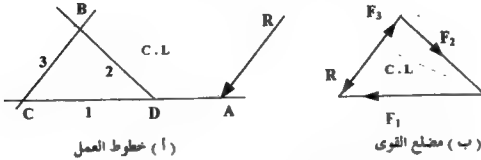
**ب - الطريقة التحليلية:**

بأخذ العزم حول A تتعين المركبة  $F_1$  المطابقة للخط المعلوم (١) ثم بالتحليل في اتجاه هذا الخط والمودي عليه نحصل على مركبة القوة الثانية  $F_2$ .

٦ - تحليل قوة R إلى ثلاث مركبات خطوط عملها معلومه 3 , 2 , 1  
شكل (١٢-٣):

طريقة كولمان: ( Colmann )

إذا كانت A هي نقطة تلاقي R فباخذ خطوط العمل وليكن ( 1 ) و B نقطة تلاقي الآخرين ( 3 ) , ( 2 ) نصل AB فيسمى خط كولمان ( CL ) شكل ( ١٢-٣ ) .



شكل ( ١٢ - ٣ )

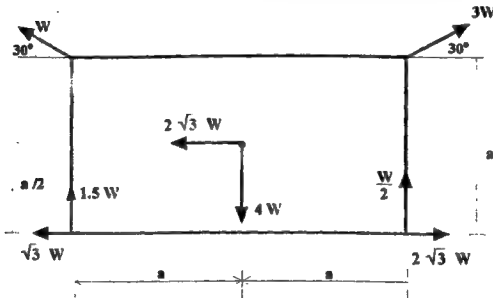
والطريقة هي أن نحلل R إلى مركبتين  $F_1$  على ( 1 ) و  $F'$  على AB بمثلث قوى كما في الشكل ( ١٢-٣ ب ) ثم نحلل المركبة  $F'$  الواقعة على الخط AB إلى مركبتين  $F_2$  ,  $F_3$  في الخطين 2 , 3 وذلك بمثلث قوى آخر يجاور المثلث الأول في الشكل ( ١٢-٣ ب ) ، وبذلك نحصل على المركبات الثلاثة المطلوبة  $F_1$  ,  $F_2$  ,  $F_3$  . وبطبيعة الحال يتعين الحل إذا كانت خطوط العمل متلاقية في نقطة واحدة أو متوازية.



## أمثلة محلولة

مثال ١:

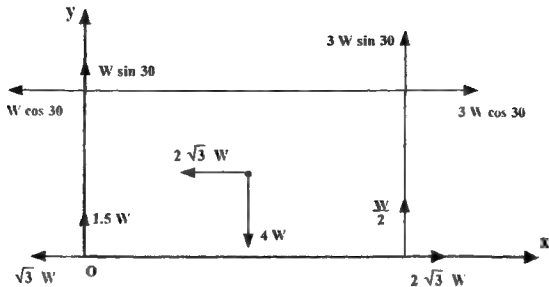
صفحة مستطيلة طولها  $2a$  وعرضها  $a$  تؤثر عليها القوى الموضحة في الشكل ، بين بالطريقة التحليلية أن الصفحة في حالة إتزان.



الحل:

١ - نرسم الشكل مرة أخرى مع وضع المحورين  $x, y$  وتحليل كل القوى الماثلة مع عدم مراعاة مقياس الرسم كما في الشكل .

٢ - نكتب ثلاث معادلات للإتزان التي يجب أن تتحقق.



$$\sum x = 0$$

$$3W \cos 30^\circ + 2\sqrt{3}W - W \cos 30^\circ - 2\sqrt{3}W - \sqrt{3}W = 0$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}W + \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{\sqrt{3}}{2}W - \frac{4\sqrt{3}}{2}W - \frac{2\sqrt{3}}{2}W = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$3W \sin 30^\circ + W \sin 30^\circ + \frac{W}{2} - 4W + 1.5W = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sum M_o = 0$$

$$3W \sin 30^\circ \cdot 2a + W \cos 30^\circ \cdot a + 2\sqrt{3}W \cdot \frac{a}{2} + \frac{W}{2} \cdot 2a - 3W \cos 30^\circ \cdot a - 4W \cdot a = 0$$

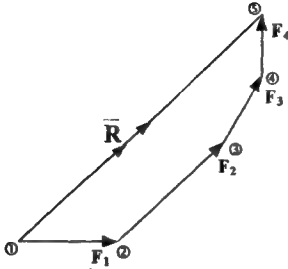
$$3W \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{2}W \cdot a + \sqrt{3}W \cdot a + W \cdot a - \frac{3\sqrt{3}}{2}W \cdot a - 4W \cdot a = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

المعادلات 1 , 2 , 3 تعطي شروط كافية لتحقيق التوازن.

ثانياً بيانياً :

مقياس رسم القوى:

( 1 cm = 20 N )



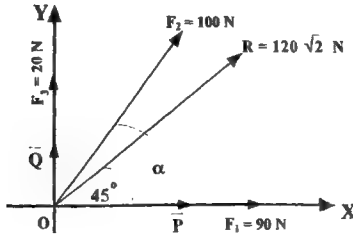
من الرسم:

$$R = 10.5 \text{ cm } ( 20 \text{ N/1 cm } ) = 210 \text{ N}$$

$$\theta \approx 45^\circ$$

مثال ٣ :

يراد اضافة القوتين المتعامدين  $\vec{P}$  ,  $\vec{Q}$  الى القوى الثلاثة  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$  و  $\vec{F}_3$  المبينة في الشكل بحيث يكون محصلة المجموعة  $\vec{R}$ .



حيث  $N = 120\sqrt{2}$  و تميل على الأفقي بزاوية  $\theta = 45^\circ$  حل تحليليا و بيانيا.

علما بأن :

$$\begin{array}{c} 5 \\ \alpha \\ 3 \end{array} \quad 4$$

الحل:

ملاحظة:

النتيجة غير المعلوم اتجاهه نفرض له أي اتجاه.

إذا كان الناتج بعد الحل بالموجب إذن الاتجاه المفروض صحيح.

إذا كان الناتج بعد الحل بالسالب إذن الاتجاه الصحيح عكس الاتجاه المفروض.

أولاً: الحل تحليليا

بفرض اتجاه  $\bar{Q}$  ,  $\bar{P}$  كما في الرسم و بتطبيق شروط التكافؤ

$$R_x = \sum F_x$$

$$120\sqrt{2} \cos 45 = 90 + 100 (\cos \alpha) + P$$

$$120 = 90 + 60 + P$$

$$\therefore P = -30N$$

إذن إشارة السالب تعني اتجاه  $\bar{P}$  عكس الاتجاه المفروض.

$$R_y = \sum F_y$$

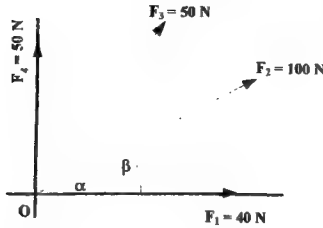
$$120\sqrt{2} \sin 45 = 100 (\cos \alpha) + 20 + Q$$

$$120 = 80 + 20 + Q$$

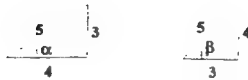
$$\therefore Q = 20 N$$

## مثال ٢:

أوجد محصلة القوى المتلاقية تحليلياً و بيانياً في الشكل المبين :



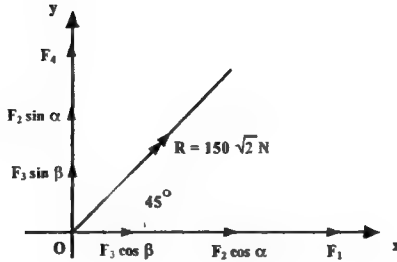
مع ملاحظة أن:



الحل:

أولاً تحليلياً :

نختار محورين متعامدين كما بالرسم (  $x, y$  ).



$$\therefore R_x = \sum F_x$$

حيث المحصلة في الاتجاه الأفقي  $R_x$  هي مجموع القوى في هذا الاتجاه.

$$\begin{aligned} R_x &= 40 + 100\left(\frac{4}{5}\right) + 50\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\therefore R_y = \sum F_y$$

حيث المحصلة في الاتجاه الرأسي  $R_y$  مجموع القوى في هذا الاتجاه.

$$\begin{aligned} R_y &= 50 + 100\left(\frac{3}{5}\right) + 50\left(\frac{4}{5}\right) \\ &= 150 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ &= \sqrt{150^2 + 150^2} = 150\sqrt{2} \text{ N} \end{aligned}$$

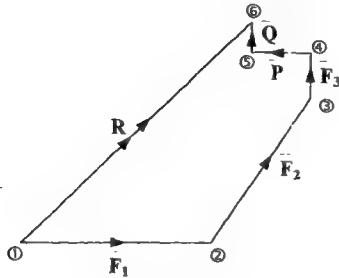
$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{150}{150} = 1$$

$$\theta = 45^\circ$$

أما خط العمل فيمر بنقطة الثلاثي.

الحل بيانياً:

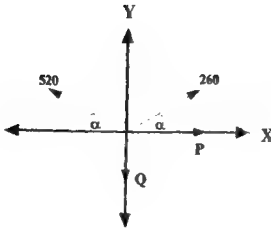
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 20 N )



$$P = 1.5 \text{ cm} \times \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 30 \text{ N}$$

$$Q = 1 \text{ cm} \times \frac{20 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 20 \text{ N}$$

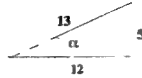
مثال ٤ :



عين مقدار القوتين المتعامدتين P و Q  
لكي تكون المجموعة الميعة بالشكل متزنة و  
ذلك تحليلها و بيانياً .

علماً بأن:

$$\tan \alpha = 5/12$$



الحل:

أولاً تحليلياً:

∴ المجموعة متزنة:

$$\therefore R = 0$$

$$\therefore R_x = 0, \quad R_y = 0$$

$$\therefore R_x = \sum F_x = 0$$

$$P + 260 \cos \alpha - 520 \cos \alpha = 0$$

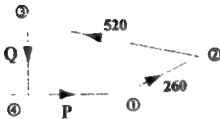
$$\therefore P = 240 \text{ N}$$

$$\therefore R_y = \sum F_y = 0$$

$$-Q + 260 \sin \alpha + 520 \sin \alpha = 0$$

$$Q = 300 \text{ N}$$

ثانياً: بيانياً



مقياس رسم القوى ( 1 cm = 100 N )

$$Q = 3\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 300\text{N}$$

$$P = 2.4\text{cm} \times \frac{100\text{N}}{1\text{cm}} = 240\text{N}$$

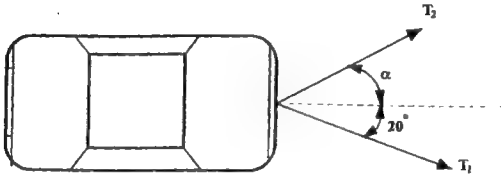


## مثال ٥ :

عربة معطلة تسحب بواسطة حبلين فإذا كانت محصلة الشدين في الحبلين هي 300 N في اتجاه محور السيارة أوجد

(أ) الشد في كل من الحبلين إذا كانت زاوية  $\alpha = 30^\circ$

(ب) أوجد أقل زاوية  $\alpha$  حتى يكون الشد  $T_2$  أقل ما يمكن.



الحل:

(أ) الزاوية  $\alpha = 30^\circ$

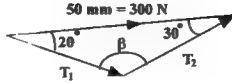
المعلوم هنا مقدار المحصلة واتجاه القوتين أي أننا مطالبين بتحليل هذه المحصلة إلى اتجاهين معلومين. وفي هذه الحالة نتبع إحدى الطرق الآتية:

١ - الطريقة البيانية: بأخذ مقياس رسم مناسب ( $1 \text{ cm} = 60 \text{ N}$ )

تكون المحصلة طولها 5 cm وبجعلها لطر في متوازي الأضلاع أو ضلع من مثلث أضلاعه توازي الاتجاهات المعلومة يمكن رسم مثلث القوى كما في الشكل وبقياس طولي الضلعين  $T_1$  ،  $T_2$  نجد أن:

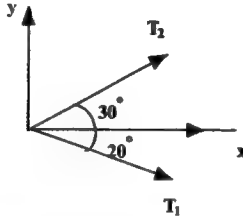
$$T_1 = 3.27 \text{ cm} \approx 3.27 \times 60 \text{ N} \approx 196 \text{ N}$$

$$T_1 = 2.23 \text{ cm} = 2.23 \times 60 \text{ N} = 134 \text{ N}$$



٢ - الطريقة التحليلية: بتحليل القوة  $T_1$  ،  $T_2$  في اتجاه المحصلة (x) واتجاهها عمودي عليه

(y)



$$\sum T_x = R_x \therefore T_1 \cos 20^\circ + T_2 \cos 30^\circ = 300$$

$$\sum T_y = R_y \therefore -T_1 \sin 20^\circ + T_2 \sin 30^\circ = 0$$

بحل المعادلتين:

$$\therefore T_2 = 300 / (\cos 30^\circ + \cos 20^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}) = 133.9 \text{ N}$$

$$T_1 = T_2 \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ} = 195.8 \text{ N}$$

ويوجد حل أبسط باستخدام قوانين حساب المثلثات في مثلث القوى نجد أن

$$R/\sin\beta = T_1/\sin 30^\circ = T_2/\sin 20^\circ$$

وتسمى هذه القاعدة بقاعدة لامي.

وهي لا تصلح إلا إذا ما كانت القوى ملتقية في نقطة واحدة

وبلاحظ في هذه المسألة أن  $20^\circ + 30^\circ + \beta = 180^\circ$

$$\therefore \beta = 130^\circ$$

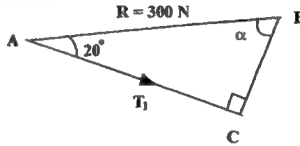
$$T_1 = R \sin 30^\circ / \sin (180^\circ - 50^\circ) = 195.8 \text{ N}$$

$$T_2 = R \sin 20^\circ / \sin (180^\circ - 50^\circ) = 133.9 \text{ N}$$

(ب) قيمة الزاوية  $\alpha$  التي تجعل القوة  $T_2$  أقل ما يمكن في مثلث القوسى ABC الشكل الآتي  
نلاحظ أن نقطة B ثابتة وباستخدام قواعد حساب مثلثات البسيطة يمكن اثبات أن أقصر طول  
للضلع CB (إذا كانت الزاوية A ثابتة وطول AB ثابت) هو طول العمود الساقط من B على  
CB والذي يمثل مقدار واتجاه القوة  $T_2$  وفي هذه الحالة تكون  $T_2$  أقل ما يمكن وتكون الزاوية  $\alpha$   
 $= 70^\circ$

$$T_2 = 300 \sin 20^\circ = 102.6 \text{ N}$$

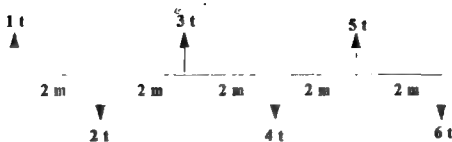
$$T_1 = 300 \cos 20^\circ = 282 \text{ N}$$



أمثلة على إيجاد محصلة مجموعة من القوى المتفرقة :

مثال ٦:

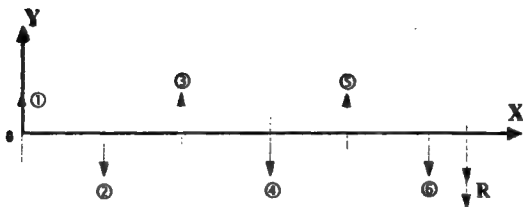
أوجد محصلة القوى الميئة تحليليا و بيانيا مع تحديد خط عملها.



الحل:

أولاً: تحليلاً

نختار محورين متعامدين كما بالرسم



$$\therefore R_x = \sum F_x = 0$$

$$R_y = \sum F_y = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 = -3$$

$$\therefore R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2}$$

$$R = 3$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

$$\therefore \theta = 270^\circ$$

أما خط العمل فيعين من قانون العزوم:

$$\sum M_o = xR_y - yR_x$$

$$\sum M_o = -2(2) + 3(4) - 4(6) + 5(8) - 6(10) = -36 \text{ t.m}$$

$$\therefore xR_y - yR_x = x(-3) - y(0)$$

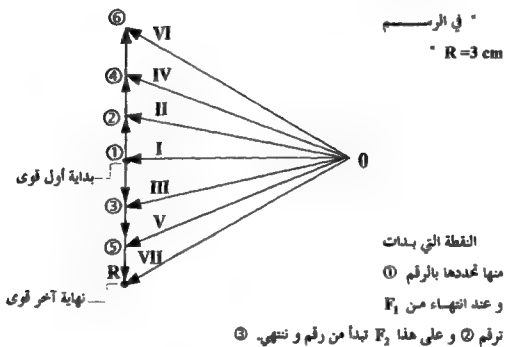
$$\therefore -36 = -3x$$

$$x = 12 \text{ m}$$

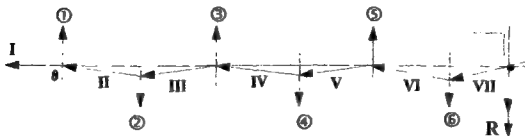
ثانياً: بياناً

مقياس رسم المسافات: ( 1 cm = 1 m )

مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 1 N )

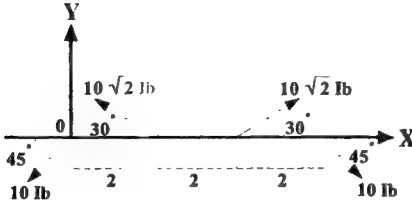


نقطة تقاطع خط عمل I مع VII



## مثال ٧:

حقق بالطرق التحليلية و البيانية أن القوى الموضحة في توازن.



الحل

أولاً: تحليلياً " تحديد محوري التعامد "

$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$-10 \cos 45^\circ - 10\sqrt{2} \cos 30^\circ + 10\sqrt{2} \cos 30^\circ + 10 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$-10 \sin 45^\circ + 10\sqrt{2} \sin 30^\circ + 10\sqrt{2} \sin 30^\circ - 10 \sin 45^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\therefore \sum M_o = 0$$

$$+ (10\sqrt{2} \sin 30^\circ)(2) + (10\sqrt{2} \sin 30^\circ)(4) - (10 \sin 45^\circ)(6)$$

$$10\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 30\sqrt{2} = 0 \quad (3)$$

من ١ ، ٢ ، ٣ ينتج أن المجموعة تحقق اتزان.

ثانياً: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: ( 1 cm = 1 m )

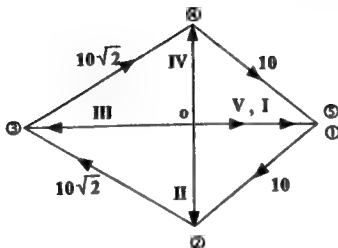
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 2 N )

ثانياً: الحل بيانياً

مقياس رسم المسافات: ( 1 cm = 1 m )

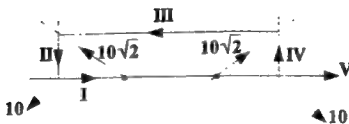
مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 2 N )

أ - مصلع القوى:



ملاحظة: مصلع القوى مقفل.

ب - المصلع الحلبي:



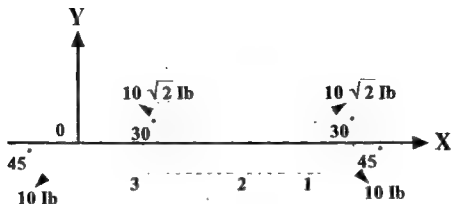
من الرسم يتضح أن المصلع الحلبي مقفل.

∴ مصلع القوى مقفل و المصلع الحلبي مقفل.

∴ مجموعة القوى تحقق اتزان.

مثال ٨:

تحقّق بالطرق التحليلية و البيانية أن محصلة القوى الموضحة أزواج ر عين عزمه.



الحل:

أولا تحليليا:

$$\therefore \sum F_x = 0$$

$$-10 \cos 45 - 10\sqrt{2} \cos 30 + 10\sqrt{2} \cos 30 + 10 \cos 45 = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\therefore \sum F_y = 0$$

$$-10 \sin 45 + 10\sqrt{2} \sin 30 + 10\sqrt{2} \sin 30 - 10 \sin 45 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\therefore \sum M_o = 0$$

$$+ (10\sqrt{2} \sin 30)(3) + (10\sqrt{2} \sin 30)(5) - (10 \sin 45)(6) \\ = 10\sqrt{2} \text{ N.cm} \dots\dots\dots (3)$$

من ١، ٢، ٣ ينتج أن:

$$\therefore \sum M_o \neq 0 = 10\sqrt{2} \text{ N.cm}$$

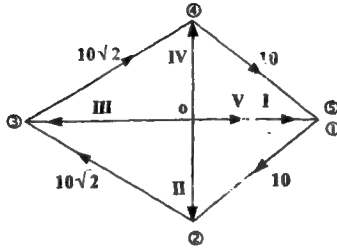
مجموعة القوى تكون أزواج عزمه  $10\sqrt{2} \text{ N.cm}$

ثانياً: الحل بيانياً

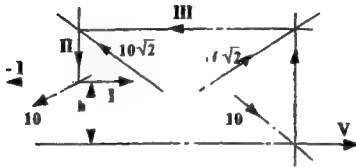
مقياس رسم المسافات : ( 1 cm = 1 m )



مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 2 N )



• مخطط القوى مفصل



• ملاحظة: أن مخطط الجلي مفتوح .

مجموع القوى =  $V + (-1)$

الزوج المحصل هو مكون من القوى  $V$  ،  $-1$

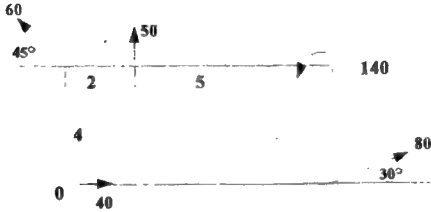
• وذلك لأن  $V$  محصلة المجموعة مضافا اليه القوى المساعدة  $I$  ليخرج  $I$  أي إضافة  $-I$  إلى  $V$

نحصل على الزوج المحصل .

$$\begin{aligned} M &= +(V)(h) \\ &= +(3.5 \times 2)(2 \times 1) \\ &= 14 \text{ N.m} = 10\sqrt{2} \text{ N.m} \end{aligned}$$

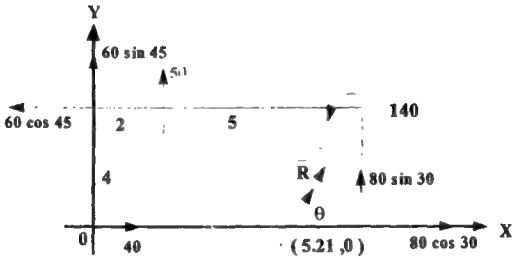
مثال ٩١:

أوجد محصلة القوى و الأزواج الموضحة في الشكل تحليلياً ، و بيانياً.



الحل :

أولاً: تحليلياً



تحديد محورين متعامدين X ، Y

$$\vec{R}_x = \sum F_x$$

$$= 40 + 80 \cos 30 - 60 \cos 45 = 66.9$$

$$\downarrow + \uparrow R_y = \sum F_y \\ = 80 \sin 30 + 50 + 60 \sin 45 = 132.4$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(66.9)^2 + (132.4)^2} = 148.9$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{132.4}{66.9} \\ \theta = 63.2^\circ$$

لتحديد مكان نقطة تأثير R

$$\sum M_o = x \cdot R_y - y \cdot R_x$$

$$x \times 132.4 + y \times 66.9 = (80 \sin 30)(7) + 50(2) + (60 \cos 45)(4) + 140$$

و بوضع  $y =$  صفر نحصل على التقاطع مع محور x

$$x = 5.21$$

ثانياً بيانياً:

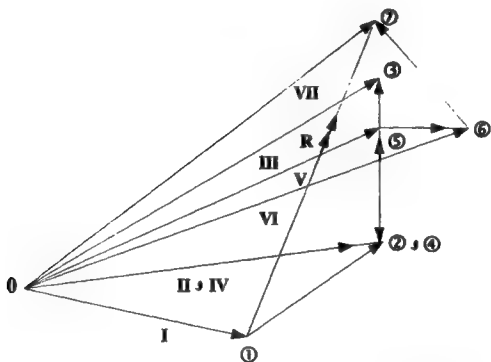
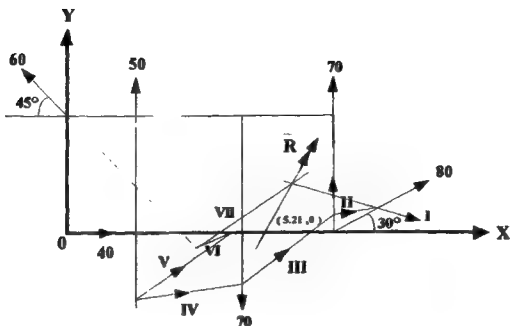
ملاحظة: في الحل بيانياً يتم تحويل عزم الإزدواج الى قوتين بينهما مسافة معينة بحيث يكون حاصل

ضرب إحدى القوتين في المسافة بينهم تساوي عزم الإزدواج.

هكذا ∴ أن هناك عزم ازدواج ١٤٠

و الذي يكافئ قوتين كل منهما ٧٠

و المسافة بينهم ٢



مقياس رسم القوى : ( 1 cm = 20 N )

مقياس رسم المسافات : ( 1 cm = 1 m )

$$R = 7.45 \times 20 = 149 \text{ N}$$

الجزء المقطوع من محور  $x = 5.2 \times 1 = 5.2 \text{ m}$

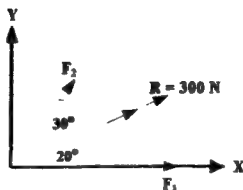
$$\theta = 63$$

## أمثلة على تحليل القوى في المستوى

مثال ١٠ :

حلل القوة  $R = 300$  نيوتن إلى قوتين  $F_1$ ،  $F_2$  معلوم خطوط عملها - حل بيانياً وتحليلياً -.

الحل: تحليلياً



نختار محورين متعامدين  $x$ ،  $y$  كما بالشكل

$$\sum F_x = R_x$$

$$\therefore 300 \cos 20 = F_1 + F_2 \cos 50 \dots\dots\dots (1)$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$300 \sin 20 = F_2 \sin 50 \dots\dots\dots (2)$$

$$F_2 = \frac{300 \sin 20}{\sin 50} = 133.94 \text{ N}$$

$$\therefore 300 \cos 20 = F_1 + 133.94 \cos 50$$

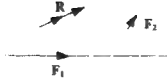
$$F_1 = 195.81 \text{ N}$$

الحل: بيانياً

∴ أنه معلوم ثلاث خطوط عمل القوى.

∴ الحل يمثل القوى.

مقياس رسم القوى: ( 1 cm = 50 N )



$$F_1 = 3.9 \times 50 = 195 \text{ N}$$

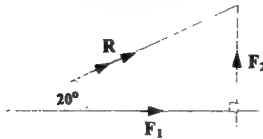
$$F_2 = 2.65 \times 50 = 132.5 \text{ N}$$

مثال ١١:

حلل القوة  $R = 300$  نيوتن إلى قوتين  $F_1$ ،  $F_2$  بحيث يكون  $F_1$  معلوم خط عملها كما في الرسم  $F_2$  تكون أقل ما يمكن حل بيانياً و تحليلياً. بحيث الزاوية بين  $R$ ،  $F_1$  هي (  $20^\circ$  ).

الحل بيانياً:

مقياس رسم القوى ( Force Scale: 1 cm = 50 N )

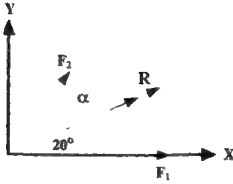


من الرسم أقل قيمة  $F_2$  عندما تكون  $F_2$  عمودياً على  $F_1$ .

$$F_1 = 5.6 \times 50 = 280 \text{ N}$$

$$F_2 = 2 \times 50 = 100 \text{ N}$$

## الحل: تحليلياً



نختار محورين متعامدين  $x$  و  $y$

نفرض أن الزاوية بين  $F_2$  و  $F_1$  هي  $\alpha$ .

في أي اتجاه فإن:

$$R_x = \sum F_x$$

$$300 \cos 20^\circ = F_1 + F_2 \cos \alpha$$

$$R_y = \sum F_y$$

$$300 \sin 20^\circ = F_2 \sin \alpha$$

$$F_2 = \frac{300 \sin 20^\circ}{\sin \alpha}$$

$F_2$  تكون أقل قيمة لها عندما يكون المقام أكبر ما يمكن و ذلك عندما  $\sin \alpha = 1$ .

$$F_{2\text{دح}} = 300 \sin 20^\circ = 102.6 \text{ N}$$

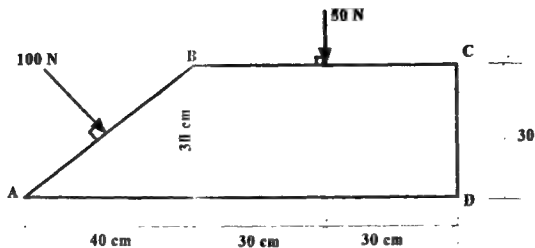
$$\therefore \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 90^\circ$$

$$\therefore F_1 = 300 \cos 20^\circ = 281.9 \text{ N}$$

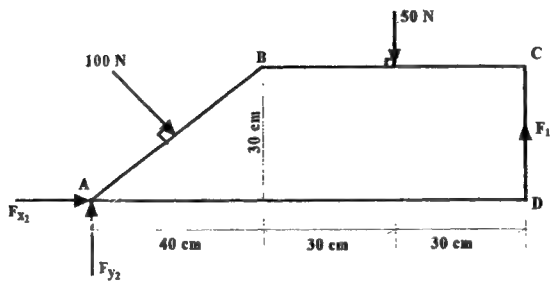
مثال ١٢:

استبدل القوى المبينة في الشكل الى قوتين  $F_1$  و  $F_2$  بحيث  $F_1$  ينطبق على  $\overline{CD}$ ،  $F_2$  يمر بالنقطة A

حل بيانياً وتحليلياً.



الحل :



الحل تحليلياً:

القوى  $F_2$  مجهولة المقدار و الاتجاه ،  $\therefore$  نفرض لها المركبتين  $F_{x_2}$  و  $F_{y_2}$  و بتطبيق المعادله التاليه

مع فرض اتجاه  $F_1$  لأعلى:



$$\begin{aligned}\sum M_A &= F_1(100) \\ &= -100(25) - 50(70) \\ \therefore F_1 &= -60 \text{ N}\end{aligned}$$

( إشارة سالبة تعني عكس اتجاه المفروض ) أي لأسفل.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_{x_2} \\ &= 100\left(\frac{30}{50}\right) = 60 \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_{y_2} + F_1 \\ &= -100\left(\frac{40}{50}\right) - 50\end{aligned}$$

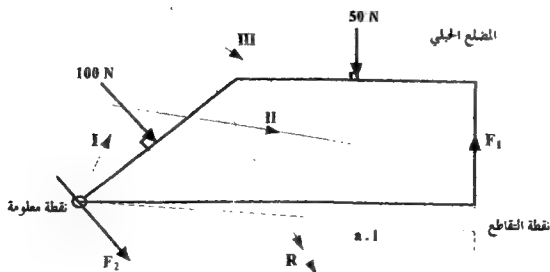
$$F_{y_2} = -(-60) - 130 = -70 \text{ N}$$

أي أن اتجاه  $F_{y_2}$  عكس الاتجاه المفروض على الرسم.

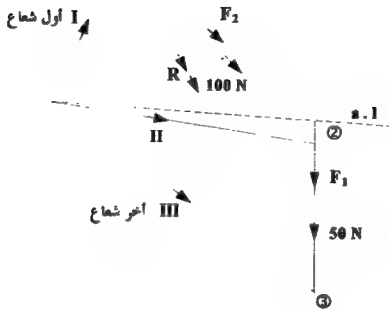
الحل بيانياً: " معلوم خط عمل و نقطة ∴ الحل بطريقة الخط القافل "

1 cm = 20 N (مقياس رسم القوى ) :

1 cm = 10 N (مقياس رسم المسافات) :

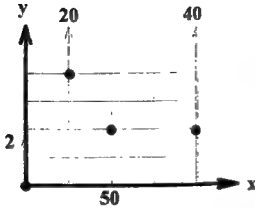


①



$$F_2 = 3 \cdot 2 \cdot 20 = 70 \text{ N}$$

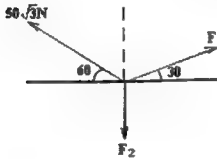
## تمارين



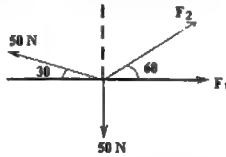
١ - عين محصلة القوى الأربع المبينة في الشكل تحليليا و بيانياً ، القوى بالكيلوجرام وطول ضلع كل من مربعات الشكل هو واحد

الجواب: . (  $R = +35\text{Kg}$  ,  $x = 2.29\text{m}$  )

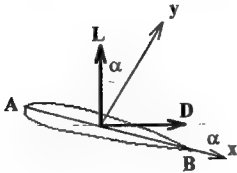
٢ - أوجد مقدار كل من القوتين  $F_1$  ,  $F_2$  ، إذا كانت مجموعة القوى المبينة متزنة حل بيانيا وحقق النتائج تحليليا.



$$F_1 = 50 \text{ N} , F_2 = 100 \text{ N}$$



$$\text{الجواب: } F_1 = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ N} , F_2 = \frac{50}{\sqrt{3}} \text{ N}$$

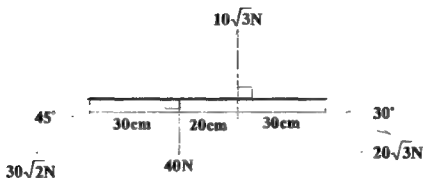


٣ - الوتر AB جناح طائرته تسير في إتجاه أفقي بميل بزاوية  $\alpha$  مقدارها  $5^\circ$  على الأفقي كما في الشكل و محصلة ضغط الهواء على الجناح في هذه الأحوال تحدد بمركبي الرفع L والسحب D حيث L تساوي ١٥٠٠ نيوتن ، D تساوي ٢٠٠ نيوتن ،

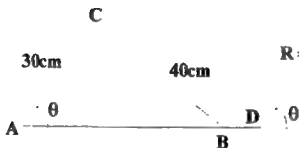
والأولى رأسيه والثانيه أفقيه كما هو مبين بالشكل. حلل ضغط الهواء إلى مركبتين متعامدتين  $x$  ,  $y$  الأولى تنطبق على الوتر  $AB$  والثانيه عموديه عليه.

الجواب: (  $X = 68.5N$  ,  $Y = 1511.7N$  )

٤ - أوجد مقدار واتجاه وخط عمل محصلة هذه المجموعه من القوى وذلك بالطريقتين البيانيه والتحليليه.



الجواب: (  $R = 70N$  ,  $L = 24.5cm$  ,  $\theta = 90^\circ$  )

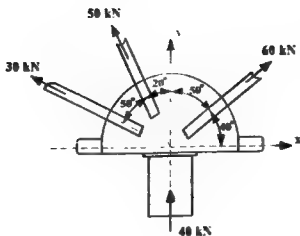


٥ - حلل القوه  $R$  إلى

ثلاث قوى تعمل في

أضلاع المثلث القائم

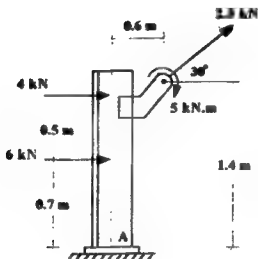
$ABC$ .



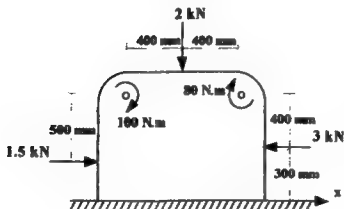
٦ - أوجد المحصلة للقوى الأربع  
المؤثرة على لوح التقوية كذلك  
أوجد قيمة الزاوية  $\theta_x$  المحصورة  
بين المحصلة والمحور  $x$

(الجواب:  $R = 54.5 \text{ kN}$ )

( $\theta = 50.2^\circ$ )

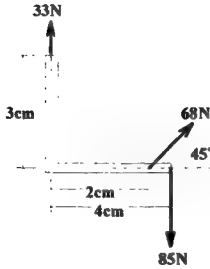


٧ - استبدل القوى الثلاث وعزم  
الازدواج بقوة مكافئة  $R$  تمر  
بـ  $A$  وعزم ازدواج  $M$



٨ - أوجد المحصلة  $R$  للقوى  
الثلاثة ولعزمي الازدواج  
كما هو موضح في  
الشكل أوجد الأحداثي  
 $x$  لنقطة المحصلة والمحور  
 $x$ .

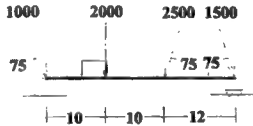
(الجواب:  $R = -1.5 \text{ i} - 2 \text{ j KN}$  ,  $x = 290 \text{ mm}$ )



٩ - إختزل مجموعة القوى والازدواج المبينه في الشكل في رأسي الزوايه ، القوى بالنيوتن والأبعاد بالستيمتر.

(الجواب:  $R_x = 48.1 \text{ N}$  ,  $R_y = -3.9 \text{ N}$  ,  $M_A = 36.2 \text{ N}\cdot\text{cm}$ )

١٠ - عين بالطريقه البيانيه محصله القوى الأربع المؤثره على العتب البسيط AB - القوى بالنيوتن والأبعاد بالستيمتر.



(الجواب:  $R = 6830$ ) رأسي لأسفل ،  $(x = 16.8)$  من المفصل A

## إتزان الجسيم والجسم المتماثل

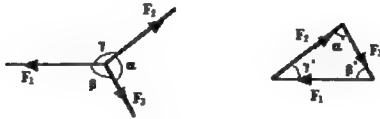
### أولاً : إتزان الجسيم:

يعتبر الجسيم متزن عندما يؤثر فيه مجموعة من القوى المتوازنة أي تتلاشى محصلتها. ونتيجة لأن الجسيم هو نقطة فإن القوى المؤثرة عليه متلاقية فينطبق عليها شروط إتزان القوى المتتجة. والشروط البانية هو أن يكون مصلع القوى مغلقاً، أما الشروط التحليلية للإتزان فهما شرطان.

$$R_x = \sum x = 0 \quad (1)$$

$$R_y = \sum y = 0 \quad (2)$$

والحالة الخاصة منها هي حالة ثلاث قوى يمكن إستخدام قاعدة "لامى" المعروفة كبديل للمعادلتين (1) ، (2) وهي مرادفة لقانون الجيوب.



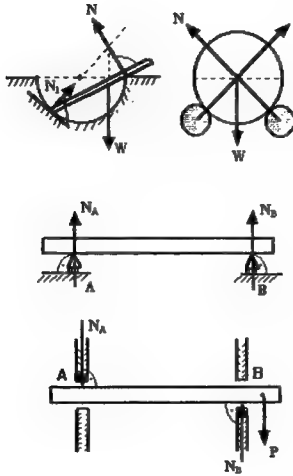
شكل (٤-١)

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$$

## ثانياً : إتزان الجسم المتماسك:

لدراسة إتزان الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة عليه وهنا يجب التمييز بين القوى العاملة ( Acting Force ) والقوى المعروفة برودود الفعل ( Reaction ) في المرتكزات. ووزن الجسم يعتبر من القوى العاملة أما ردود الفعل فتوقف على نوع الإرتكاز.

### ١ - الإرتكاز البسيط:



شكل (٤-٢)

وهو أبسط أنواع الإرتكاز كحالة تماس الأجسام المتساوية ورد الفعل عمودي على المستوى المتماس للسطحين المتلامسين أو عمودي على اتجاه أية حركة نسبية بينهما كما في الأمثلة المبينة بشكل (٤-٢)، تستخدم البكرات كمركبات للكباري وهي كالتماس الأملس نظراً لصغر مقاومات التدرج لهذه البكرات ورد الفعل عمودي على المستوى التي تدرج عليه هذه البكرات. ونظراً لأن اتجاه رد الفعل في المرتكز البسيط محدد فهو يعتبر مجهولاً واحداً في معادلات الإتزان.

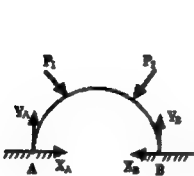


## ٢ - الإرتكاز المفصلي:

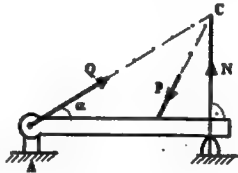
الإرتكاز المفصلي عبارة عن تثبيت نقطة من جسم بحيث يمكن أن يدور حولها. والمفصل في المستوى عبارة عن ثقب دائري بداخله مسار أسطواني كما في شكل (٣-٤) ولما كان التلامس بين المسار وحافة الثقب الدائري يمكن أن يتم في أي نقطة على محيط الدائرة فإن رد الفعل يمكن أن يتخذ أي اتجاه حسب ما تتطلبه ظروف التحميل والإرتكاز.

في شكل (٣-٤) إذا فرضنا موجه  $P$  أو اتجاهها يتغير مقدار واتجاه رد الفعل  $Q$  في المفصل  $A$  بحيث يتم الإرتان بملاقي القوى الثلاث  $Q, N, P$  في نقطة واحدة. وعلى ذلك يتطوي رد فعل المفصل على مجهولين هما مقداره وميله أو مركبتيه المتعامدتين  $Q_x, Q_y$ .

ونلاحظ أن حل جسم على مركز بسيط من ناحية ومركز مفصلي من ناحية أخرى يتطوي على ٣ قيم مجهولة لرد فعل المراكزين (إثنان في المفصل وواحد في المركز البسيط) مما يجعل إرتان الجسم محدداً إستاتيكيًا لأن معادلات الإرتان الثلاث تكفي لتحديد المجهول الثلاثة كما في شكل (٣-٤).

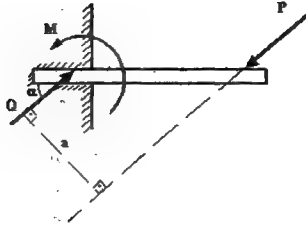


شكل (٣-٤) ب)



شكل (٣-٤) أ)

أما الجسم المحمول على مفصلين كما في شكل (٣-٤) فهو غير محدداً إستاتيكيًا لأن معادلات الإرتان الثلاث لا تكفي لتحديد المجهول الأربعة  $X_A, Y_A, X_B, Y_B$  الناشئة في المفصلين ولا بد من الإستعانة بنظريات المرونة لحل مثل هذه المسألة وهذا يخرج عن نطاق هذا الكتاب.



شكل (٤-٤)

يعطي شكل (٤ - ٤) فكرة عن الثبيت وهو منع الحركة سواء خطياً أو دورانياً عند أحد أطراف الجسم فتولد قوى حول هذا الجزء المثبت تتوازن مع محصلة القوى العاملة  $P$  ويمكن إختزال رد فعل نقطة الثبيت إلى قوى  $Q$  وعزم دوران  $M$  وهما معاً يعادلان قوة تساوي وتضاد محصلة القوى العاملة  $P$  فإذا غيّرنا مقداراً أو موضع  $P$  يتغير مقدار واتجاه  $Q$  ومقدار  $M$  تبعاً لشروط التوازن في بكل حالة.

وعلى هذا يتألف رد فعل الثبيت من مجاهيل ثلاثة هي مقدار واتجاه  $Q$  وعزم الثبيت  $M$  أو  $Q_x, Q_y, M$ .

### ثالثاً : شروط إتزان الجسم المتماسك:

لدراسة إتزان الجسم المتماسك يستكمل أولاً شكل القوى المؤثرة وهي القوى العاملة وردود الفعل المجهولة في المرتكزات كما سبق شرحه في البند السابق. وتمثل القوى المؤثرة على جسم متماسك بصفة عامة حالة القوى المتفرقة التي سبق بيان عملياتها.

ويتزن الجسم المتماسك بتلاشي محصلة مجموعة القوى المتفرقة المؤثرة عليه ويلزم لذلك من الشروط ما يلي حسب ما سبق شرحه في الباب السابق.

( أولاً ) بيانياً :

يلزم شرطان هما : ١ - مضلع القوى مقفل.

٢ - المضلع الحيلي مقفل.

( ثانياً ) تحليلياً :

يلزم ٣ شروط هي :

$$R_x = \sum X = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$R_y = \sum Y = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(6)$$

وذلك بالتحليل في اتجاهين متعامدين  $x$  ،  $y$  وأخذ العزوم حول نقطة ما  $A$ . هذا ويمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بأخذ العزوم حول ٣ نقط ليست على استقامة واحدة.

$$\sum M_A = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\sum M_B = 0 \dots\dots\dots(8)$$

$$\sum M_C = 0 \dots\dots\dots(9)$$

وشرط اختيار النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  بحيث لا تقع على استقامة واحدة ضروري لأنه قد تكون هناك محصلة وقد تقع نقطتان مثل  $A$  ،  $B$  عليهما مصادفة فيتلاشى العزم حولهما تلقائياً فإذا تلاشى العزم حول نقطة خارجة  $C$  كان ذلك دليلاً على تلاشي المحصلة ذاتها.

كما يمكن تكوين ٣ معادلات بديلة للاتزان وذلك بتحليل واحد في اتجاه  $x$  مثلاً وأخذ العزوم حول نقطتين  $A$  ،  $B$  بحيث لا يتعامد  $x$  على  $AB$  لأنه قد تكون هناك محصلة مطابقة للخط  $AB$  مصادفة فيتلاشى عزمها حول كل من  $A$  ،  $B$  تلقائياً كما تتلاشى مركبتها في اتجاه  $x$  في حالة التعامد تلقائياً كذلك.

وعدد الشروط التحليلية للاتزان ثلاثة وأية معادلة أخرى لا تأتي بجديد. وهذه الشروط الثلاثة لازمة وكافية.

لازمة بمعنى أنه إذا كان الجسم المتمايك متزنأ فلا بد من تحققها أي من تلاشي المحصلة.  
وكافية بمعنى أنه إذا توفرت هذه الشروط أي تلاشت المحصلة فإن الجسم يكون متزنأ.

وفي الحالة الخاصة كحالة القوى المتقية يؤول عدد الشروط إلى اثنين كما سبق شرحه.  
وكذلك في حالة القوى المتوازية يصير عدد الشروط اثنين فقط لأن معادلة التحليل في اتجاه عمودي  
على القوى المتوازية تكون غير ذات موضوع في هذه الحالة.

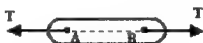
وإذا انصرفت القوى المؤثرة على جسم متمايك متزن على ٣ قوى فقط وجب أن تلقي في  
نقطة واحدة وأن يعطى تحليلها في إتجاهين متعامدين.

## رابعاً : السواند والشدّادات:

إذا اترن الجسم تحت تأثير قوتين فقط كل منهما تؤثر في نقطة ما من الجسم فإن القوتين تعملان  
على خط عمل واحد وهو الخط الواصل بين نقطتين تأثير القوتين كما يتساوى مقدارا القوتين ويتضاد  
إتجاههما كما في الشكل ( ٥-٤ أ، ب ).



شكل ( ٥-٤ أ )

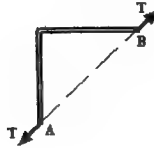
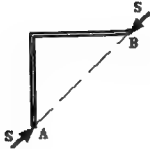


شكل ( ٥-٤ ب )

وقد يتخذ الجسم المتمايك شكل قضيب خفيف ينتهي عند كل من طرفيه بمفصل، فإذا لم يؤثر أي  
حمل ( أو قوة ) على القضيب بين مفصليه أطلق عيه قضيب خفيف غير حمل فإذا اترن القضيب في هذه  
الحالة فإنه يتزن تحت تأثير ردي الفعل عند مفصلين، وعلى ذلك تظهر ردود الأفعال على شكل زوج  
من القوى المتساوية وخط عملها هو الخط الواصل بين مفصلين ( محور القضيب ) كما في الشكل ( ٦-٤ )  
( ٤ ) .



قضب خفيف غير محمل

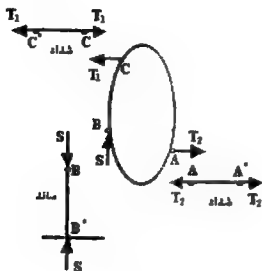


مساند

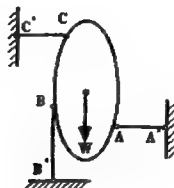
شدادات

شكل (٦-٤)

والقضيب المشلود يعتبر شداً أي تأثر عليه قوى شد دائماً، أما القضيب المضغوط فيعتبر مسانداً أي أنه يؤثر عليه قوى ضغط دائماً، وعند اتصال هذه القضبان بأجسام أخرى عملة بقوى خارجية فإن كل قضيب خفيف غير محمل ( مسانداً أو شداً ) كوسيلة من وسائل الارتكاز يعطي للجسم رد فعل عند مفصل الارتكاز في الاتجاه المضاد لاتجاه تأثيره على القضيب وخط عمله معلوم وهو محور القضيب، وعلى ذلك فرد فعل الشداد أو الساند هو مجهول واحد ( في المقدار فقط ).



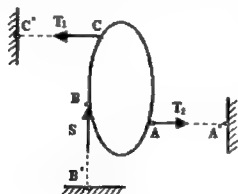
شكل (٤-٨)



شكل (٤-٧)

الجسم المتمايك في الشكل (٤-٧) محمل بقوة  $W$  ويرتكز على ثلاثة أعضاء خفيفة غير محملة وهي القضبان  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  فإذا فرضنا أن القضبان  $AA'$ ,  $CC'$  شدادات اتزنت بمفردها تحت تأثير قوى الشد عند مفاصلها وعند انتقال ردود الأفعال عند مفاصل الاتصال بالجسم  $A, C$  تظهر ردود الأفعال هذه  $(T_1, T_2)$  على الجسم كقوى تشد هذا الجسم ولذلك فإذا اتصل شداد بجسم ما بمفصل فإن هذا الشداد يعمل على شد الجسم ولذا أطلقنا عليه هذه التسمية.

وفرض أن القضيب  $BB'$  ساند اتزان تحت تأثير قوى الضغط فيه بمفرده وعند انتقال رد الفعل



شكل (٤-٩)

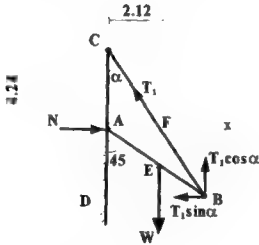
عليه في المفصل  $B$  منه إلى الجسم يظهر رد الفعل  $S$  على الجسم كما لو كان يستند هذا الجسم ولذلك يطلق على القضيب  $BB'$  بالساند شكل (٤-٨).

وعموماً عند ارتكاز جسم ما على مجموعة من الأعضاء الخفيفة الغير محملة (سواند أو شدادات) فإنه يمكن عزل هذا الجسم عن هذه الأعضاء مع وضع ردود أفعال هذه الأعضاء على الجسم كقوى شد أو سند حسب نوع العضو ومراعاة أن خطوط عمل هذه القوى هي الخط الواصل بين مفصلي كل عضو كما في الشكل (٤-٩).

## أمثلة محلولة

مثال ١:

قضيب AB يزن ٥ كجم طوله ٦ م يستند على نقطة A من أحد طرفيه على حائط أملس وطرفه الآخر مربوط بخيط من B ومنبت عند C. الزاوية BAD تساوي ٤٥° في وضع الاتزان و AC تساوي ٢.٤ م، أوجد الشد في الخيط وكذلك رد فعل الحائط.



الحل:

$$\begin{aligned} AF = FE = AE \cos 45 \\ = 3 \cos 45 \\ = 2.12 \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \frac{2.12}{4.24} = 0.5$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0.5 = 36^\circ 34'$$

$$\therefore \sum x = 0$$

$$N - T_1 \sin \alpha = 0$$

$$N = T_1 \sin \alpha$$

$$\therefore \sum y = 0$$

$$W - T_1 \cos \alpha = 0$$

$$W = T_1 \cos \alpha$$

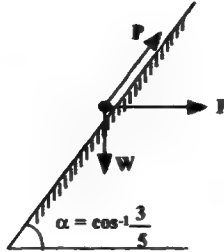
$$T_1 = \frac{W}{\cos \alpha} = 5.6 \text{ Kg}$$

$$N = 5.6 \times \sin 26.5667$$

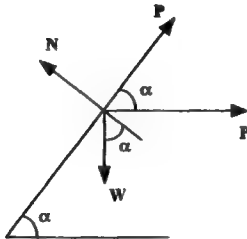
$$= 2.5 \text{ Kg}$$

## مثال ٢:

وضع جسم وزنه  $W$  على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية  $\alpha$  ومنع من الانزلاق بواسطة قوتين متساويتين مقدار كل منهما  $P$  أحدهما أفقية الأمام والثانية في اتجاه المستوى إلى أعلى كما في الشكل. أوجد مقدار رد فعل المستوى، حل تحليلياً وبيانياً.



الحل التحليلي:



نضع رد الفعل المستوى  
(أو ركاز بسيط) ثم نكتب  
معادلات اتزان الجسم كما في  
الشكل

بالتحليل في اتجاه المستوى

$$\sum X = 0$$

$$P + P \cos \alpha - W \sin \alpha = 0$$



$$P + \frac{3}{5}P = \frac{4}{3}P_w$$

$$\frac{8}{5}P = \frac{4}{3}w$$

$$P = \frac{w}{2}$$

بالتحليل في اتجاه العمودي على المستوى

$$\sum Y = 0$$

$$N - P \sin \alpha - w \cos \alpha = 0$$

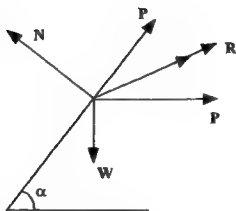
$$N = \frac{4}{5}P + \frac{3}{5}w = \frac{4}{5}\left(\frac{w}{2}\right) + \frac{3}{5}w$$

$$N = w$$

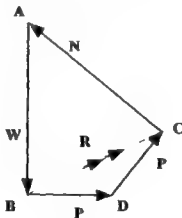
الحل البياني:

مقياس رسم القوى

نفرض أن  $w = 5 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = w/5$



(أ)



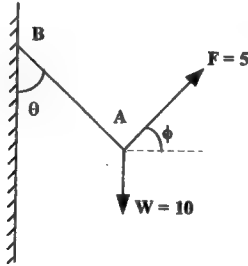
(ب)

شكل (أ) يمثل شكل خطوط العمل، شكل (ب) يمثل مضلع القوى المتكفل وفيه  $\vec{AB}$  يمثل وزن الجسم  $W$  ،  $\vec{BC}$  يمثل محصلة القوتين المتساويتين  $P$  و  $P$  ،  $\vec{CA}$  يمثل رد فعل المستوى  $N$  ،  $\vec{DC}$  يمثل القوة المائلة  $P$  ،  $\vec{BD}$  يمثل القوة ناتجة من مضلع القوة وبالقياس

$$N = 5 \text{ cm} = w , P = 2.5 \text{ cm} = w/2$$

مثال ٣ :

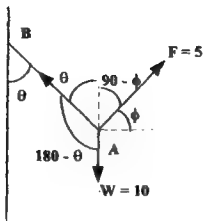
علق جسم وزنه  $10 \text{ N}$  بحيط عفيف غير مرن  $AB$  مثبت طوله الآخر في نقطة ثابتة  $B$ . أثرت على الجسم قوة  $F$  مقدارها  $5 \text{ N}$  ليعايد الحيط وضعاً مائلاً زاوية  $\theta$  على الرأسي كما في الشكل. أوجد الاتجاه  $\phi$  الذي تؤثر فيه هذه القوة حتى يصنع الحيط مع الرأس في وضع الاتزان أكبر زاوية ممكنة. حل تحليلياً وبيانياً



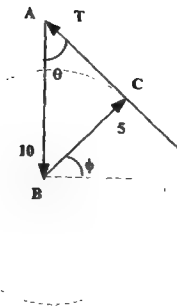
الحل التحليلي:

نضع رد فعل الحيط ثم نكتب معادلات اتزان الجسم كما في شكل (أ)

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى فقط لذلك يمكن استخدام قاعدة لامي.



(أ)



(ب)

$$\frac{10}{\sin(\theta + 90 - \phi)} = \frac{5}{\sin(180 - \theta)}$$

$$2 \sin \theta = \cos(\theta - \phi)$$

بمفاضلة الطرفين بالنسبة إلى الزاوية  $\phi$

$$2 \cos \theta \frac{d\theta}{d\phi} = -\sin(\theta - \phi) \left\{ \frac{d\theta}{d\phi} - 1 \right\}$$

ولكي تكون  $\theta$  أكبر ما يمكن نضع  $\frac{d\theta}{d\phi} = 0$  ومنها

$$\sin(\theta - \phi) = 0$$

$$\theta = \phi$$

وبالتعويض في المعادلة نحصل على أكبر قيمة للزاوية  $\theta$

$$2 \sin \theta_{\max} = 1$$

$$\theta_{\max} = 30^\circ = \phi$$

الحل البياني:

$$1 \text{ cm} = 2 \text{ N}$$

شكل (ب) يمثل مثلث القوى المقلل ABC الذي فيه  $\vec{AB}$  يمثل الوزن  $10 \text{ N}$ ،  $\vec{BC}$  يمثل القوة  $F = 5 \text{ N}$  والمثل الهندسي للنقطة C هو دائرة مركزها B

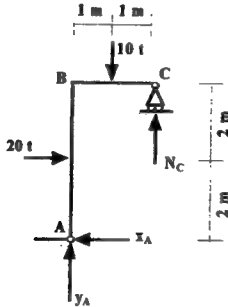
$\vec{CA}$  يمثل الشد T ولكي تكون الزاوية  $\theta$  أكبر ما يمكن يجب أن يكون  $\vec{AC}$  مماس للدائرة.

من مثلث القوى وبالقياس

$$\theta_{\max} = 30^\circ = \phi$$

مثال ٤ :

الجسم المتماثل ABC يرتكز مفصليا في C عين ردود الفعل في كل من المفصل A و C.



الحل :

$$\therefore \sum M_A = 0$$

$$N_C(2) - 10(1) - 20(2) = 0$$

$$\therefore N_C = 25 \text{ t}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$20 - X_A = 0$$

$$X_A = 20 \text{ t}$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$y_A + N_C - 10 = 0$$

$$y_A + 25 - 10 = 0$$

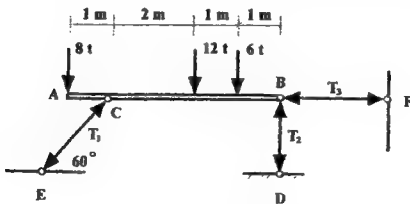
$$\therefore y_A = -15 \text{ t}$$

أي أن اتجاه  $y_A$  عكس الاتجاه المفروض.

مثال ٥ :

القضيب BA محمول على ثلاث قضبان خفيفة و القضيب يحمل بالقوى المبينة في الشكل ، يراد

تعيين ردود الأفعال في القضبان الخفيفة .



الحل :

$$\therefore \sum M_C = 0$$

$$8(1) - 12(2) - 6(3) + T_2(4) = 0$$

$$T_2 = 8.5 \text{ t}$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$-8 + T_1 \sin 60 - 12 - 6 + T_2 = 0$$

$$T_1 = 20.2 \text{ t}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$-T_3 + T_1 \cos 60 = 0$$

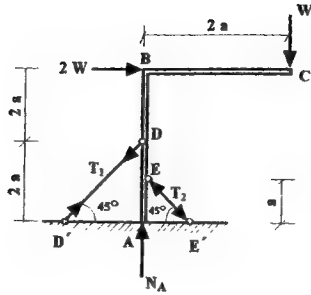
$$T_3 = 10.1 \text{ t}$$

مثال ٦ :

القضيب  $CBA$  الحمل كما في الشكل يرتكز ارتكاز بسيط عند  $A$  و يحفظ بتوازنه القضيبان

الخفيفان  $DD'$  ،  $EE'$ . المطلوب : تعيين رد الفعل عند  $A$  و القوى المحورية في القضبان الخفيفان.

علماً بأن :  $AE = a$  ,  $AD = DB = 2a$  ,  $BC = 2a$



الحل :

$$\therefore \sum M_D = 0$$

$$-T_2 \sin 45(a) - 2w(2a) - w(2a) = 0$$

$$T_2 = -6\sqrt{2} w$$

أي أن اتجاه  $T_2$  عكس الاتجاه المفروض .

$$\therefore \sum X = 0$$

$$2w - T_1 \sin 45 - T_2 \sin 45 = 0$$

$$2w - \frac{T_1}{\sqrt{2}} - \left( -\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$T_1 = 8\sqrt{2} w$$

$$\therefore \sum Y = 0$$

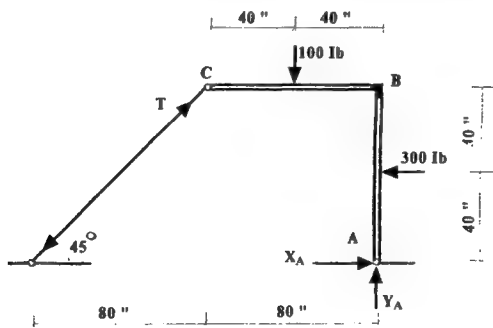
$$N_A - W - T_1 \sin 45 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$N_A - W - \frac{8\sqrt{2}W}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} W = 0$$

$$N_A = 15 w$$

مثال ٧ :

جسم CBA متماسك بتركز على مفصل ثابت في A و يشده القضيب الخفيف DC و الجسم ABC محمل كما في الشكل عين ردود الفعل في المفاصل .





الحل :

$$\therefore \sum M_A = 0$$

$$300(40) + 100(40) + T \sin 45(80) - T \cos 45(80) = 0$$

$$T = -100\sqrt{2} \text{ lb}$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$T \sin 45 - 300 + X_A = 0$$

$$X_A = 200 \text{ lb}$$

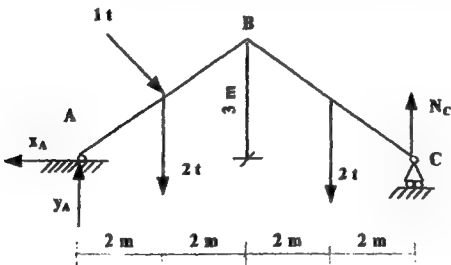
$$\therefore \sum Y = 0$$

$$T \cos 45 - 100 + Y_A = 0$$

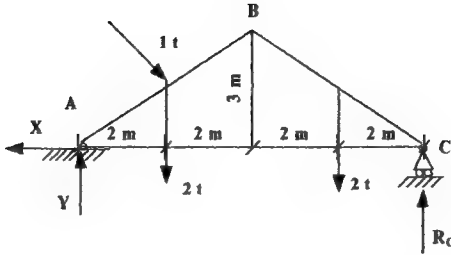
$$Y_A = 0 \text{ lb}$$

مثال ٨ :

ABC هيكل متماثل مثبت مفعلياً في A ويرتكز ارتكازاً حراً في C ويحمل الأحمال الموضحة بالأطنان. احسب ردود الفعل في A ، C وحقق النتائج بياناً



الحل:



بأخذ العزوم حول المفصل A نحصل على ردود الفعل  $R_c$

$$1 \times 2.5 + 2 \times 2 + 2 \times 6 = R_c \times 8$$

$$R_c = \frac{18.5}{8} t = 2.30 t$$

بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على رد فعل المفصل A:

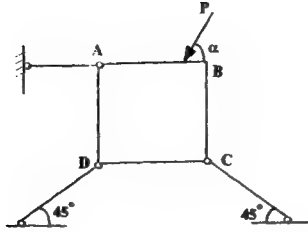
$$x = 1 \times \frac{1.5}{2.5} = 0.6 t$$

$$y + R_c = 2 + 2 + 1 \times \frac{2}{2.5}$$

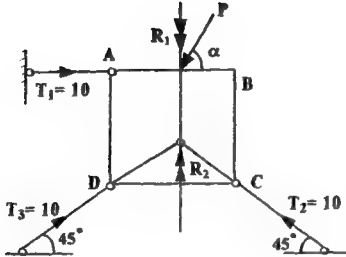
$$y = 2.5 t$$

مثال ٩:

لوحة مربعة خفيفة ABCD تحملها من رؤوسها A ، C ، D ، ثلاثة سواند خفيفة وتؤثر عليها قوة P كما في الشكل، عين مقداراً واتجهاً بحيث يكون رد فعل كل من السواند مساوياً ١٠ كجم. حل بالطرق التحليلية والبيانية.



الحل:



ردود فعل الوصلات نفسها  
ومقدار كل منها ١٠ كجم كما  
هو معطى برأس السؤال. اللوحة  
مترنة تحت تأثير ٤ قوى هي  $T_1$  ،  
 $T_2$  ،  $T_3$  ،  $P$  من شرط التوازن  
القوى الأربع أن تكون محصلة  
أي اثنين منها مساوية ومضادة  
لمحصلة الاثنين الآخرين وبجمعها  
خط عمل واحد.

محصلة  $T_2$  ،  $T_3$  هي  $R_2$  المينة بالشكل وهي رأسية وتقطع الضلع  $AB$  في منتصفه  $E$  وفيها  
تلقي القوتان الأخريان  $T_1$  ،  $P$  كما تمر بها محصلة هاتين القوتين وبذا تتحدد نقطة تأثير القوة  
المجهولة  $P$  وهي  $E$  منتصف  $AB$

أما مقدار  $P$  فيمكنه التحليل الأفقي والرأسي للقوى الأربع المترنة:

$$10 + \frac{10}{\sqrt{2}} - \frac{10}{\sqrt{2}} - P \cos \alpha = 0$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{10}{\sqrt{2}} - P \sin \alpha = 0$$

$$\therefore P \cos \alpha = 10, P \sin \alpha = 10\sqrt{2}$$

بالربيع والجمع نحصل على مقدار  $P$  :

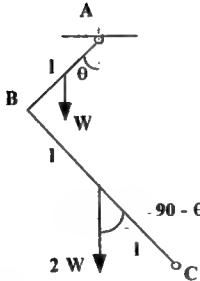
$$P^2 = 100 + 200 = 300$$

$$\therefore P = 10\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{2}$$

وللحل بيانياً يرسم مضلع قوى للأربع قوى المتزنة

مثال ١٠ :



جسم متماسك على شكل زاوية قائمة ABC معلق مفصلياً في A ويتركز على وتد أملس عند طرفه C. أوجد رد فعل الوتد بدلالة الزاوية  $\theta$  التي يتلاشى عندها رد الفعل هذا.

إذا كانت ( $\theta = 60^\circ$ ) أوجد قيمة القوة  $P$  التي يلزم التأثير بها على خط العمل CB لحفظ الإتزان بدون الوتد وأوجد رد فعل المفصل A في هذه الحالة الأخيرة.

القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه جزئية  $W$  ، ورد الفعل العمودي من الوتد الأملس

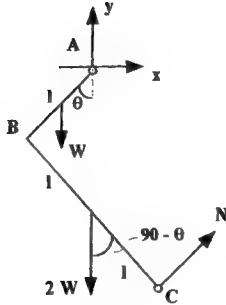
$N$  ، رد فعل المفصل ( $x, y$ )

$$N_2 = W \sin \theta \cdot \frac{1}{2} + 2W \sin \theta - 2W \cos \theta = 0$$

$$\therefore N = W (\cos \theta - \frac{5}{4} \sin \theta)$$

تتلاشى N عندما يكون:

$$\tan \theta = 4/5$$



الحالة الثانية: في حالة التأثير بقوة P في خط العمل CB نأخذ العزوم حول A

$$-P + W \sin 60^\circ \frac{1}{2} + 2W \sin 60^\circ - 2W \cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore P = \left( \frac{5\sqrt{3}}{4} - 1 \right) W$$

بالتحليل أفقياً ورأسياً على مركبتي رد فعل المفصل:

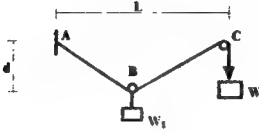
$$X - P \cos 60^\circ = 0$$

$$Y - 3W + P \sin 60^\circ = 0$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} \left( \frac{5\sqrt{3}}{4} - 1 \right) W$$

$$Y = \left( \frac{9}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) W$$

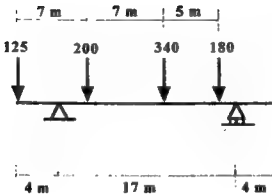
## تمارين



- ١ - بكرة خفيفة B معلق بها ثقل  $W_1$  وهي مركبة على حبل خفيف A B C مثبت طرفه A و يمر طرفه الآخر حول بكرة ثابتة صغيرة مماسة C ليتدلى منه ثقل W . عين المسافة L بدلالة  $W_1$  ، W ، L .

$$\left[ d = \frac{1}{2} L \sqrt{(2w/w_1)^2 - 1} \right]$$

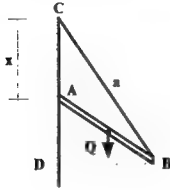
الجواب



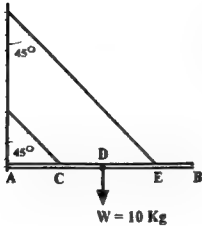
- ٢ - عين ردود فعل مركزي العتب A B القوى بالكجم و الأبعاد بالمتر ، و ذلك بالطرق التحليلية و البيانية .

$$[R_A = 180 \text{ Kg} , R_B = 365 \text{ Kg}]$$

٣- قضيب منتظم A B وزنه Q. و طوله l محمول في إحدى نهايته B بحيط B C طوله a و يرتكز أيضا في A الموجودة رأسيا أسفل C على حائط رأسي أملس كما في الشكل . أوجد وضع الإتزان الممكن للقضيب بدلالة الطول x .



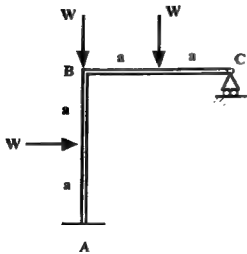
$$\left[ x = \sqrt{(a^2 - l^2)/3} \right] \text{ الجواب}$$



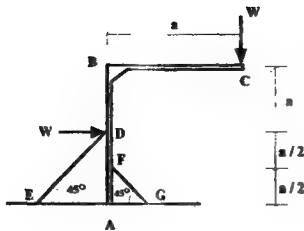
٤- قضيب منتظم A B وزنه ١٠ كجم معلق في وضع أفقي على حائط رأسي أملس . و يربطه الى الحائط خيطان كما في الشكل . عين رد فعل الحائط عند A و شدي الخيطين .

علما بأن طول AB = ٤ متر

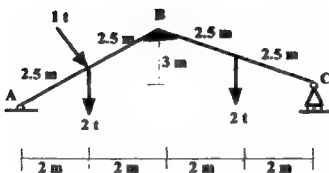
و أن AC = CD = DE = EB = 1 m



٥- الجسم المتناسك A B C يرتكز مفصليا في A و ارتكاز حرا في C ، عين ردّي الفعل في A ، C و ذلك تحليليا و بيانيا .



٦- ABC جسم متماسك خفيف  
قائم الزاوية في B يتركز بطرفه  
A على أرض ملساء و صلته  
AB رأسي و يشد إلى الأرض  
شدان ED ، EG كما في  
الشكل . أوجد شديهما ورد  
فعل الأرض في A نتيجة لتأثير  
القوتين الموضعتين .



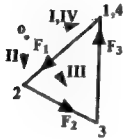
٧- ABC هيكل متماسك  
مثبت مفعلياً في A و  
يتركز ارتكازاً حراً في C و  
يعمل الأحمال الموضحة  
بالشكل. احسب ردود  
الفعل في A ، C .



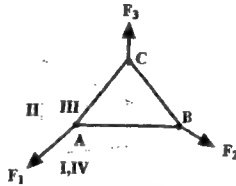
## إتزان مجموعة الجسيمات

إذا اتصلت مجموعة من الجسيمات المتزنة فيما بينها بأعضاء خفيفة و أنثرت القوى الخارجية على الجسيمات فقط دون الأعضاء فإن المجموعة ككل تنزن تحت تأثير القوى الخارجية فقط بينما يتزن كل جسم على حده تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليه فضلاً على ردود الأفعال للأعضاء الخفيفة التي يتصل بها و هي القوى المحورية في هذه الأعضاء .

و إتزان الجسم أو المجموعة ككل لها ثلاثة شروط تحليلية لإتزان القوى الخارجية على المجموعة و بياناً يجب أن تمثل بمضلع قوى مقفل و مضلع حيلي مقفل كما في الشكل ( ٥ - أ ، ب ) .

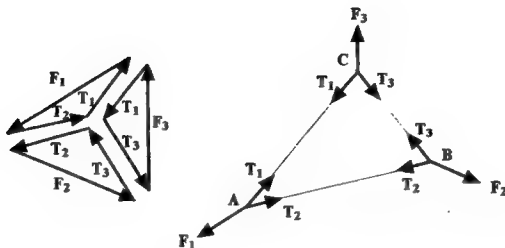


شكل ( ٥ - ب ) مضلع القوى مقفل



شكل ( ٥ - أ ) المضلع الحيلي مقفل

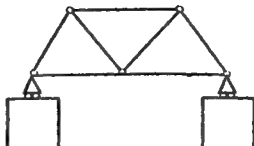
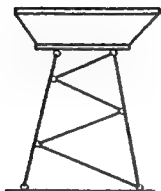
إتزان الجسم يتحقق بشرطين تحليليين فقط و بياناً بشرط واحد فقط هو مضلع قوى مقفل للقوى الخارجية و القوى المحورية .



## الهياكل المحملة بالمفاصل ( الجمالونات أو الشبكيات

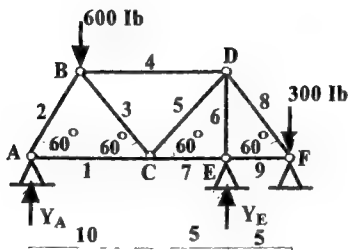
### : ( Trusses

تتكون الهياكل الإنشائية المستخدمة في الكبارى و الأبراج المعدنية العالية من مجموعه من القضبان المستقيمة الخفيفة الوزن بالنسبة لأحمال الواقعة على الهياكل ، و تتصل تلك القضبان مع بعضها البعض عن طريق مفاصل ملساء بقدر الإمكان و تسمى القضبان بأعضاء الهيكل . و يلاحظ أن الأحمال التي تؤثر على الهيكل تقع مباشرة على المفصل . و لذا فإن أعضاء الهيكل تعتبر خفيفة و غير محملة فتعمل أما سوائد أو شدادات أي أنها أعضاء مضغوطة أى ضاغطة للمفصل أو أعضاء مشدودة أى تعمل كشداد للمفصل . و من حيث الدراسة الإستاتيكية فإنه يمكن اعتبار مفاصل الهيكل مجموعة من الجسيمات المتزنة تحت تأثير الأحمال الخارجية و قوى الشد أو الضغط ( القوى المحورية ) الناتجة من الأعضاء المتصلة بالمفاصل . و أبسط وحدة هندسية من عدة خلايا مثلثة . و نظرا لأن الأحمال الخارجية المؤثرة على هذه الهياكل تؤثر على المفاصل فقط فيطلق عليها بالهياكل المحملة بالمفاصل . و لهذا فيدرس ارتزان كل مفصل باعتباره جسيم واقع تحت تأثير مجموعة من القوى الملتقى في المفصل ذاته و هذه القوى تتألف من الأحمال الخارجية و كذا : جود فعل الأعضاء المتصلة بالمفاصل من شدود أو ضغوط .



## أمثلة

مثال ١ :



في الميكل القفصلي المبين  
بالشكل أوجد جميع القوى  
المحورية في جميع أعضاء  
الميكل.

الحل :

بدراسة اتزان المجموعة ككل يتم الحصول على  $y_A$  ،  $y_E$  كما يلي :

$$\sum M_A = 0$$

$$y_E \times 15 - 300 \times 20 - 600 \times 5 = 0$$

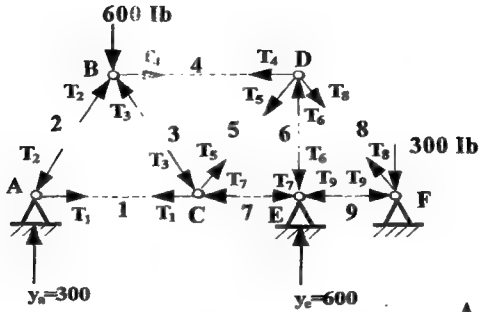
$$y_E = 600 \text{ lb}$$

$$\sum M_E = 0$$

$$y_A \times 15 = 600 \times 10 - 300 \times 5 = 0$$

$$y_A = 300 \text{ lb}$$

ثم بدراسة كل مفصل على حده :



المفصل A

$$\sum y = 0$$

$$300 - T_2 \sin 60 = 0$$

$$T_2 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_1 - T_2 \cos 60 = 0$$

$$T_1 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

مفصل B

$$\sum y = 0$$

$$T_2 \sin 60 + T_3 \sin 60 - 600 = 0$$

$$T_3 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

$$\sum x = 0$$

$$T_4 + 346 \cos 60 - 346 \cos 60 = 0$$

$$T_4 = 0 \text{ lb}$$

$$\Sigma x = 0$$

$$T_4 + 346 \cos 60 - 346 \cos 60 = 0$$

$$T_4 = 0 \text{ lb}$$

مفصل C

$$\Sigma y = 0$$

$$T_3 \sin 60 - T_5 \sin 60 = 0$$

$$T_3 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

$$\Sigma x = 0$$

$$T_5 \cos 60 + T_3 \cos 60 - T_7 - T_1 = 0$$

$$T_7 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

مفصل D

$$\Sigma y = 0$$

$$T_5 \sin 60 + T_3 \sin 60 - T_6 = 0$$

$$\Sigma x = 0$$

$$T_3 \cos 60 - T_5 \cos 60 - T_4 = 0$$

$$T_3 = 346 \text{ lb} \quad \text{قوة شد}$$

$$T_6 = 600 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

المفصل E

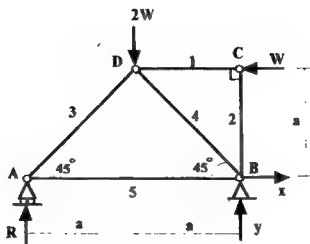
$$\Sigma x = 0$$

$$T_7 - T_9 = 0$$

$$T_9 = 173 \text{ lb} \quad \text{قوة ضغط}$$

مثال ٢:

الميكال المفصلي المبين يرتكز ارتكاز بسيط في A و على مفصل ثابت B أوجد رددي فعل المرتكزين و القوى المحورية في القضبان.



الحل :

بدراسة التوازن المجموعة ككل يتم الحصول على  $x$  ،  $y$  ،  $R$  وذلك بأخذ العزوم حول  $B$

$$\sum M_B = 0$$

$$Wa + 2Wa - R2a = 0$$

$$R = \frac{3}{2} W$$

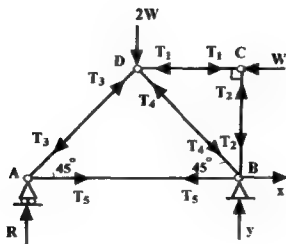
$$\sum x = 0$$

$$x = W$$

$$\sum y = 0$$

$$Y = 2W - 1.5W$$

$$= 0.5W$$



### اتزان المفصل C

$$\Sigma x = 0$$

$$T_1 - W = 0$$

$$T_1 = W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$T_2 = 0$$

### اتزان المفصل D

$$\Sigma x = 0$$

$$T_3 \cos 45^\circ - T_1 - T_4 \cos 45^\circ = 0$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}} = W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$\frac{T_3}{\sqrt{2}} + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 2W$$

من المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$T_3 = \frac{3W}{\sqrt{2}} \quad , \quad T_4 = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

### اتزان المفصل A

$$\Sigma x = 0$$

$$T_5 - \frac{T_3}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_5 = \frac{T_3}{\sqrt{2}} = \frac{3W}{2}$$

و مما سبق يمكن تلخيص خطوات الحل فيما يلي :

## خطوات حل المسائل المتعلقة بإتزان الجسيمات

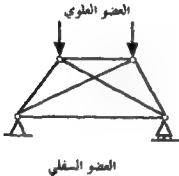
١ - يأخذ إتزان المجموعة ككل كما لو كانت جسم واحد متماسك و نعين من إتزانه ردود الأفعال الخارجية و ذلك بتطبيق "  $\sum M = 0$  و  $\sum F_y = 0$  و  $\sum F_x = 0$  مع ملاحظة أنه لا تظهر القوى المحورية في الهيكل "

٢ - يؤخذ إتزان عدد من الجسيمات كل منها على حده بما يعطي عدد من المعادلات مساويا لعدد المجاهيل .

أ - و يفضل أن نبدأ بجسم يلقي فيه مجهولان فقط أو أقل .

ب - ثم نسلّم من الجسم الأول الى جسم آخر لا يزيد مجاهيله عن اثنين و هكذا .... " الجسم هو المفصل " علما بأنه في إتزان الجسم يطبق  $\sum F_y = 0$  و  $\sum F_x = 0$  .

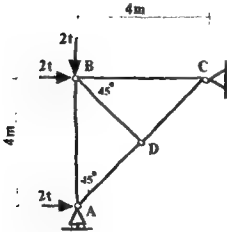
٣ - نتأكد من الحل بأن أي مفصل من المفصلات في حالة إتزان .



ملاحظة : يجب أن نتذكر قانون الفعل و رد الفعل عند الإنتقال من جسم إلى جسم آخر .

ملاحظة : غالبا في الجمالونات " Trusses " المضغ الخفيف العلوي غالبا ما يكون ضغط المضغ الخفيف السفلي غالبا ما يكون شد

مثال ٣ :



هيكل مفصلي يحمل المفصلات و يرتكز على ركائز خارجيه.

١ - عين ردود فعل الارتكاز عند A و C .

٢ - عين القوى المحورية في القضبان الخفيفة AB و AC و DC و BC .



الحل:

١ - نأخذ اتزان الهيكل ككل كأنه جسم متماسك و نعين من اتزانه ردود الأفعال الخارجية (لا تظهر القوى المحورية في الهيكل) .

$$\Sigma M_C = 0$$

$$2(4) + 2(4) - N_A(4) = 0$$

$$N_A = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_x = 0$$

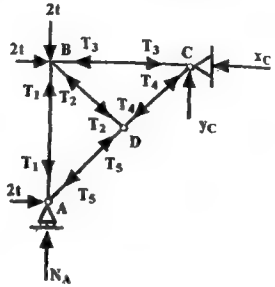
$$2 - x_C + 2 = 0$$

$$x_C = 4 \text{ t}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_A - 2 + y_C = 0$$

$$y_C = -2 \text{ t}$$



٢ - للحصول على القوى المحورية للعضبان الخفيفة ، نأخذ اتزان المفصل ككل على حده باعتبار أن كل مفصل جسم متزن .

المفصل A

$$\Sigma F_x = 0$$

$$2 - T_5 \sin 45 = 0$$

$$T_5 = 2\sqrt{2} \cdot \text{t}$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_A - T_1 - T_5 \sin 45 = 0$$

$$4 - T_1 - 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_1 = 2\text{t}$$

## المفصل B

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 - 2 + T_2 \sin 45 = 0$$

$$2 - 2 + \frac{T_2}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_2 = 0$$

## المفصل C

$$\Sigma F_y = 0$$

$$y_C + T_4 \sin 45 = 0$$

$$-2 + \frac{T_4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$T_4 = 2\sqrt{2} \text{ t}$$

٣ - وللتأكد من الإجابة : نحري الإتزان على أي مفصل من المفصلات .

## إتزان المفصل D

Check :

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= \frac{T_2}{\sqrt{2}} + \frac{T_5}{\sqrt{2}} - \frac{T_4}{\sqrt{2}} \\ &= 0 + \frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}$$

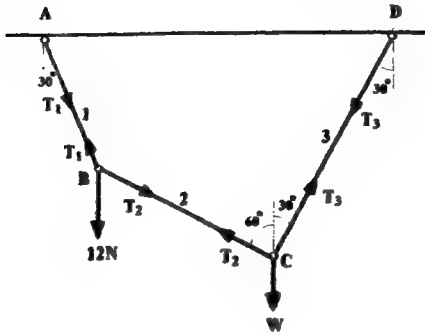
$$\Sigma F_y = 0$$

∴ التواتج  $T_4$  و  $T_5$  و  $T_2$  صحيحة .

مثال ٤ :

خيط خفيف ABCD يحمل ثقلين أحدهما قيمته ( ١٢ نيوتن ) في B ، الآخر W في C ، و كانت اجزاء الخيط AB ، BC ، CD تميل على الرأسى بزاوية ٣٠° ، ٦٠° ، ٣٠° على الترتيب .

أوجد W و الشد في أجزاء الحبل الثلاثة .



الحل :

دراسة اتزان العقدة " B " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150} = \frac{T_1}{\sin 60} = \frac{T_2}{\sin 150}$$

$$T_1 = \frac{12 \sin 60}{\sin 150} = 12\sqrt{3} \text{ N}$$

$$T_2 = \frac{12 \sin 150}{\sin 150} = 12 \text{ N}$$

دراسة اتزان العقدة " C " : بتطبيق قاعدة لامي

$$\frac{12}{\sin 150} = \frac{T_3}{\sin 120} = \frac{W}{\sin 90}$$

$$T_3 = 12\sqrt{3} \text{ N}$$

$$W = 24 \text{ N}$$

## التماثل الإستاتيكي حول محور :

يلزم أن يتوفر فيه شرطين :

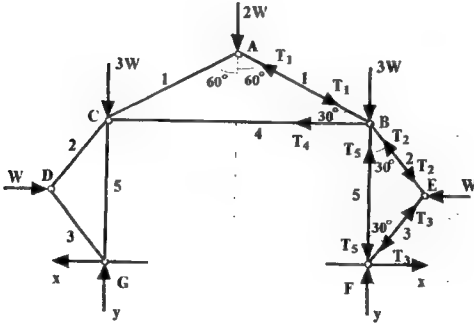
١ - تماثل هندسي ( زوايا و أبعاد ) .

ب - تماثل في القوى .

\* في هذه الحالة يكفي: بأخذ اتزان نصف المجموعة فقط مع مراعاة أن نتيجة للتماثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال .

مثال ١ :

عين القوى المحورية و كذلك ردود فعل المفصلين F و G في الهيكل الخمل المفصل المبين بالشكل تحليليا و بيانيا .



الحل :

أولا تحليليا :

∴ هناك تمثيل هندسي ، تمثيل للقوى .

∴ تمثيل القوى الخورية في الأعضاء المتناظرة على جانبي محور التمثيل .

∴ أنه لم يعطى أبعاد الميكل لاستخدام اتزان الجسم ككل أولا .

نبدأ بدراسة اتزان المفصل التي لايزيد عدد القوى المجهولة فيها عن اثنان .

اتزان المفصل A .

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_1 \cos 60 + T_1 \cos 60 - 2W = 0$$

$$T_1 = 2W$$

اتزان المفصل E

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_3 \cos 30 - T_2 \cos 30 = 0$$

$$T_3 = T_2$$

$$\Sigma X = 0$$

$$T_2 \cos 60 + T_3 \cos 60 - W = 0$$

$$\frac{T_2}{2} + \frac{T_3}{2} - W = 0$$

$$T_2 = T_3 = W$$

اتزان المفصل B

$$\Sigma F_x = 0$$

$$T_1 \cos 30 - T_2 \sin 30 - T_4 = 0$$

$$T_4 = \left( \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) W$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_3 + T_2 \cos 30 - T_1 \sin 30 - 3W = 0$$

$$T_3 = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) W$$

اتزان المثلث F

$$\Sigma F_x = 0$$

$$X - T_1 \sin 30 = 0$$

$$X = \frac{W}{2}$$

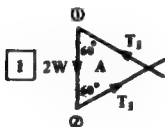
$$\Sigma F_y = 0$$

$$Y - T_3 - T_2 \cos 30 = 0$$

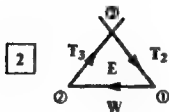
$$Y = 4W$$

ثانياً بياناً :

برسم مقياس رسم التوى  $1 \text{ cm} = W$



$$T_1 = 2 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = 2W$$



$$T_3 = 1 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = W$$

$$T_2 = 1 \text{ cm} \times \frac{W}{1 \text{ cm}} = W$$



$$T_4 \approx 1.2\text{cm} \times \frac{W}{1\text{cm}} = 1.2W$$



$$Y = 4\text{cm} \times \frac{W}{1\text{cm}} = 4W$$

عين القوى المحورية في الأعضاء ١ ، ٢ ، ٣ .



الحل :

لتعين القوى المخورية المطلوبة نتخيل مستوى قاطع للقضبان الثلاثة .  
دراسة التوازن المستطيل العلوى

$$\Sigma M_B = 0$$

$$T_1(a) - P(b) = 0$$

$$T_1 = \frac{b}{a} P$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$T_3(a) - P(2b) = 0$$

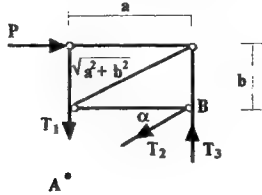
$$T_3 = \frac{2b}{a} P$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-T_2 \cos \alpha + P = 0$$

$$-T_2 \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + P = 0$$

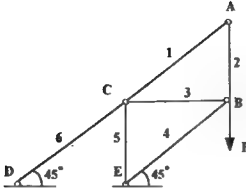
$$T_2 = P \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$





# أمثلة محلولة

مثال ١:

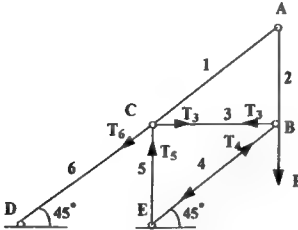


عين تحليلياً القوى المحورية في أعضاء الهيكل المفصلي المرتكز والمحمل كما في الشكل.

اتزان المفصل A:

هذا المفصل متزن تحت تأثير قوتين محاوريتين في العضوين المتقنين فيه وحيث أن هاتين القوتين ليستا على استقامة واحدة إذن فالإتزان غير ممكن إلا إذا تلاشت القوتان معاً.

اتزان المفصل B:



القوى المؤثرة هي  $P$  ،  $T_3$  ،  $T_4$  بالتحليل أفقياً ورأسياً:

$$T_4 \cos 45^\circ = T_3$$

$$T_4 \sin 45^\circ = P$$

$$T_4 = P\sqrt{2} \quad , \quad T_3 = P \text{ ومنهما}$$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي  $T_3$  ،  $T_5$  ،  $T_6$  بالتحليل أفقياً ورأسياً:

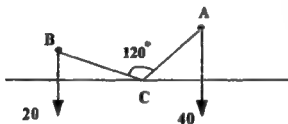
$$T_6 \cos 45^\circ = T_3$$

$$T_6 \sin 45^\circ = T_5$$

$$T_6 = P\sqrt{2} \quad , \quad T_5 = P \text{ ومنهما}$$

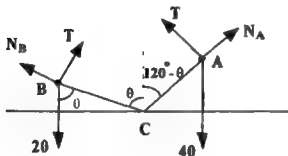
مثال ٢ :

جسمان A , B وزن كل منهما 20 N , 40 N يرتبطان بحبل خفيف يمر فوق أسطوانة أفقية



ملساء ويقابل زاوية مركبة مقدارها  $120^\circ$  كما في الشكل، أوجد موضع الاتزان والشد في الحبل ورد فعل الأسطوانة.

الحل:



الشكل المقابل يمثل خطوط العمل في وضع عام.

اتزان الجسم A

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على

$$\frac{40}{\sin 90^\circ} = \frac{T}{\sin(60^\circ + \theta)} = \frac{N_A}{\sin(210^\circ - \theta)} \quad (1)$$

اتزان الجسم B:

بتطبيق قاعدة لامي نحصل على:

$$\frac{20}{\sin 90} = \frac{T}{\sin(180 - \theta)} = \frac{N_B}{\sin(90 + \theta)} \quad (2)$$

من (١) و (٢) بالقسمة نحصل على :

$$\frac{40}{20} = \frac{\sin(180 - \theta)}{\sin(60 + \theta)}$$

$$\sin \theta = 2 (\sin 60 \cos \theta + \cos 60 \sin \theta)$$

$$\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta$$

$$\therefore \cos \theta = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

ثم بالتعويض في (١)

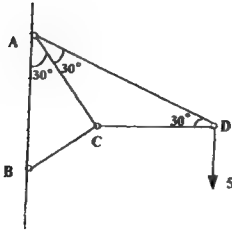
$$T = 20 \text{ N}$$

$$N_A = 20\sqrt{3} \text{ N}$$

وبالتعويض في (٢)

$$N_B = 0$$

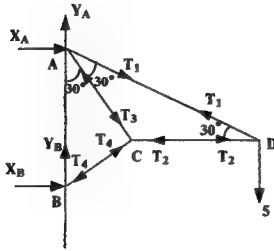
مثال ٣ :



المبكل المفصلي المبين بالشكل مثبت مفصلياً في حائط رأسي عند A وعلق من المفصل D ثقل قدره 5 kN . أوجد القوى المحورية وردود الفعل عند A, B . حل تحليلياً وبياناً

الحل التحليلي:

شكل (١) يمثل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل المفصلي (القوى وردود الأفعال).



اتزان المفصل D

القوى المؤثرة هي 5 ،  $T_1$  ،  $T_2$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

شكل (١)

$$\sum Y = 0$$

$$T_1 \sin 30 - 5 = 0$$

$$\therefore T_1 = 10 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$-T_1 \cos 30 + T_2 = 0$$

$$\therefore T_2 = 5\sqrt{3} \text{ kN}$$

اتزان المفصل C:

القوى المؤثرة هي  $T_2$  ،  $T_3$  ،  $T_4$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$T_4 - T_3 \cos 30 = 0$$

$$T_4 = 705 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$T_3 + T_2 \sin 30 = 0$$

$$T_3 = 2.5 \sqrt{3} \text{ kN}$$

اتزان المفصل B:

القوى المؤثرة هي  $Y_B$  ،  $X_B$  ،  $T_4$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$X_B - T_4 \cos 30 = 0$$

$$X_B = 3.75 \sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B - T_4 \cos 60 = 0$$

$$Y_B = 3.75 \text{ kN}$$

اتزان المفصل A:

القوى المؤثرة هي  $T_3$  ،  $T_1$  ،  $X_A$  ،  $Y_A$  بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على:

$$\sum X = 0$$

$$X_A + T_1 \cos 30 - T_3 \cos 60 = 0$$

$$X_A = -3.75 \sqrt{3} \text{ kN}$$

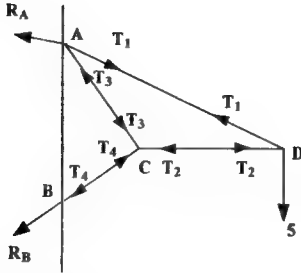
$$\sum Y = 0$$

$$Y_A + T_3 \cos 30 - T_1 \cos 60 = 0$$

$$Y_A = 1.25 \text{ kN}$$

الحل البياني:

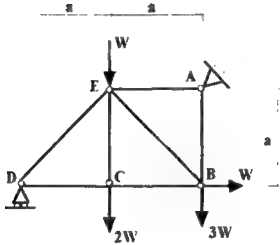
مقياس رسم القوى 1 cm = 2 kN



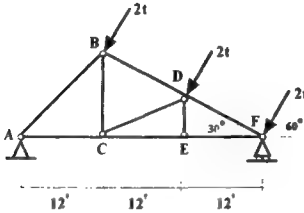
شكل (ب) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل الفصلي. يمكن الحل بيانياً وذلك برسم مثلثات قوى للمفاصل D كما في شكل (جـ) ، C كما في شكل (د) ، A ، كما في شكل (و) ومضلع قوى المفصل B كما في شكل (هـ). وفي كل منها نبدأ بتمثيل القوى المعلومة عند المفصل ويطلق المثلث أو المضلع باتجاهات القوى المجهولة في المقدار.



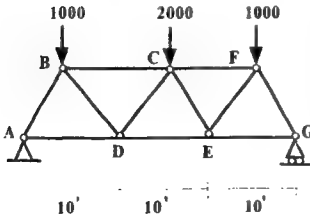
## تمارين



١ - للهيكل الحمل المفصل المبين بالشكل  
عين القوى المحورية في أعضاء الهيكل و  
كذلك ردود فعل الارتكاز الحر D و  
المفصل A .

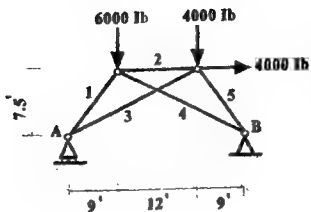


٢ - عين قوى الضغط أو الشد في  
العضوين AB ، CB .



٣ - عين الشد أو الضغط في  
كل من أعضاء الهيكل  
المفصلي المبين بالشكل ( القوى  
بالرطل " الباوند " و الأبعاد  
بالقدم و جميع المثلثات متساوية  
الأضلاع ) .





٤ - للهيكل المفصلي المحمل كما  
 في الشكل أوجد ردود فعل  
 المربكات و القوى المحورية  
 في جميع الأعضاء ، علماً بأن  
 المضمون ٣ ، ٤ غير مرتبطين  
 في نقطة التقاطع .



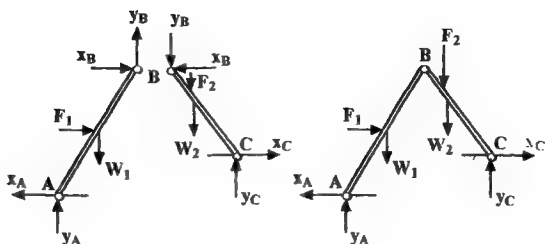
## إتزان مجموعة الأجسام المتماسكة

إذا اتصلت مجموعة أجسام متماسكة عن طريق مفاصل أو نقط ارتكاز على بعضها و كانت في وضع متزن فإنه يمكن اعتبار أن المجموعة كلها عبارة عن جسم واحد و يكتب لها ثلاث معادلات إتزان كما في حالة الجسم المتماثل .

كما انه يجب دراسة كل جسم على حدى و يكون له ثلاث معادلات إتزان لذا فان عدد المعادلات للإتزان هي مساوية لعدد الأجسام المتماسكة  $\times 3$  .

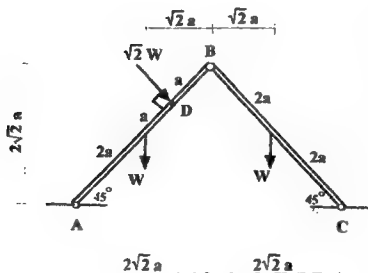
و هناك نوعين من الإرتكاز :

- أ - الإرتكاز الداخلي : وهو يحدث بين جسمين أو أكثر من مجموعة الأجسام و لا يكون متصلا بأي جسم آخر خارجي .
- ب - الإرتكاز الخارجي : و هو الذي يربط أي جسم في المجموعة بالخارج مثل الأرض أو الحائط أو أي جسم آخر خارجي لا ندوس إتزانه .



الجسم المين في الشكل مكون من جسم AB مرتبط مع BC جسم آخر و الجسمين مرتبطين مفصليا مع الأرض في A ، C و لذا يعتبران مفصلان خارجيان و المفصل B داخلي و الفرق بين المفصل الداخلي و الخارجي هو أنه لا تظهر ردود أفعال عند المفصل الداخلية و تظهر عند المفصل الخارجية و السبب في ذلك هو أنه هناك رد فعل في B ناتج من الجسم AB الاول مع الجسم BC الثاني و كذلك هناك رد فعل في B من الجسم الثاني على الجسم الاول مساو له في المقدار و مضاد له في الاتجاه ، لذا يتلشى عند التصاقهما ويظهرا عند فصلهما و الشكل الموضح له ثلاث معادلات اتزان كمجموعة ٦ معادلات اتزان لو تم الفصل لتعين الست مجهول  $Y_B, X_B, Y_A, X_A, Y_C, X_C$  .

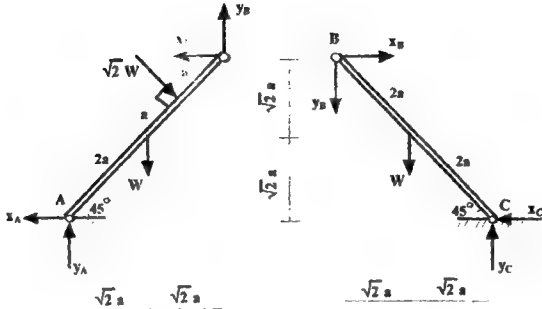
## مثال ١ :



قضبان متشابهان  
منتظمان AB ، BC وزن  
الواحد W وطوله 4a  
مرتبطان مفصليا في B و  
يربطهما الى الأرض المفصلات  
كما في الشكل ، يؤثر  
حمل  $\sqrt{2}W$  عموديا على  
AB عند نقطة D حيث AD  
= 3a . عين ردود الفصل في

المفاصل الثلاثة A , B , C .

الحل :



عدد المجاميل  $x_C, y_C, X_B, Y_B, x_A, y_A$

عدد المعادلات = عدد الأجسام  $\times 3$

بدراسة التوازن المجموعة ككل و بأخذ العزوم حول نقطة A

$$\sum M_A = 0$$

$$y_C + 4\sqrt{2}a - W \times 3\sqrt{2}a - W \times \sqrt{2}a - \sqrt{2}W \times 3a = 0$$

$$4y_C = 3W + W + 3W$$

$$y_C = \frac{7}{4}W \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$y_C + y_A = W + W + W \times \cos 45^\circ \times \sqrt{2}$$

$$y_C + y_A = 2W + \frac{1}{\sqrt{2}} W \times \sqrt{2}$$

$$y_A = 3W - \frac{7}{4}W$$

$$y_A = \frac{12W - 7W}{4} = \frac{5}{4}W$$

$$y_A = \frac{5}{4}W \dots\dots\dots (2)$$

نتقل بعد ذلك لدراسة AB و يوجد به ٣ مجهول هي  $x_B$  ،  $y_B$  ،  $x_A$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$\sqrt{2}W \cdot a + W \cdot a\sqrt{2} = x_A \times 2a\sqrt{2} + y_A \times 2a\sqrt{2}$$

$$2W = 2x_A + 2y_A$$

$$x_A = W - \frac{5}{4}W = -\frac{1}{4}W \dots\dots\dots (3)$$

أي أن مقدارها 1/4 و اتجاهها عكس الاتجاه المقروض.

$$\Sigma X = 0$$

$$\sqrt{2}W \sin 45 = x_A + x_B$$

$$W = -\frac{1}{4}W + x_B$$

$$x_B = \frac{5}{4}W \dots\dots\dots (4)$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$y_A + y_B = W + \sqrt{2}W \cos 45$$

$$y_B = 2W - \frac{5}{4}W$$

$$y_B = \frac{8-5}{4}W$$

$$y_B = \frac{3}{4}W \dots\dots\dots (5)$$

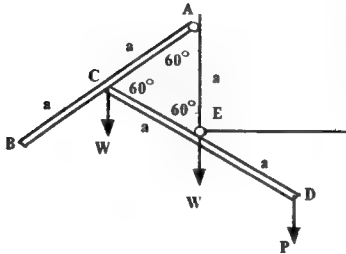
يبقى من المجاهيل  $x_C$  من اتران الجسم BC .

$$\sum X = 0$$

$$x_B = x_C$$

$$x_C = \frac{5}{4} W \quad \dots\dots\dots (6)$$

مثال ٢ :

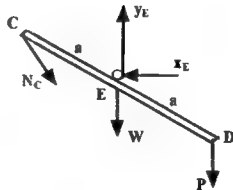
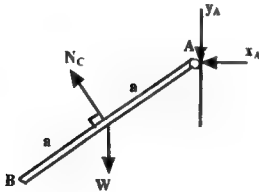


قضبان متساويان AB ، DC كل منهما وزنه W وطوله 2a يتصلان بمحاط بمفصلين ثابتين A ، E ويتلامسان في C دون احتكاك عين القوة P اللازمة لإتزان القضيبين في الوضع المبين بالشكل وعين ردود الأفعال في المفصلات .

الحل :

نلاحظ أن AB به ثلاث مجاهيل فقط وهي  $x_A$  ،  $y_A$  ،  $N_C$  وان CD به ٤ مجاهيل P ،

$x_E$  ،  $y_E$  ،  $y_A$  ،  $x_A$  ، P وهي مجاهيل و المجموعة بها  $N_C$  ،  $y_E$  ،  $x_E$



$$\Sigma M_A = 0$$

$$N_C \cdot a = W \cdot a \sin 60$$

$$N_C = \frac{\sqrt{3}}{2} W \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma y = 0$$

$$y_A = W - N_C \cos 30$$

$$y_A = \frac{1}{4} W \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma x = 0$$

$$x_A + N_C \sin 30 = 0$$

$$x_A = -\frac{\sqrt{3}}{4} W \quad \dots\dots\dots (3)$$

بدراسة المجموعة

$$\Sigma M_E = 0$$

$$P \cdot a \cos 30 = x_A \cdot a + W \cdot a \sin 60$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} P = -\frac{\sqrt{3}}{2} W + \frac{\sqrt{3}}{2} W$$

$$P = \frac{1}{2} W \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\Sigma X = 0$$

$$x_E + x_A = 0$$

$$x_E = \frac{\sqrt{3}}{4} W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$y_E + y_A = P + W + W$$

$$y_E = \frac{9}{4} W \quad \dots\dots\dots (5)$$

و مما سبق يلاحظ أن بعد رسم الأشكال يجب التأكد من أن عدد الجاهيل يساوي عدد المعادلات المتاحة للإتزان . و لذا فإن أفضل طريقة لحل مسائل المجموعات المفصلية هو اتباع الخطوات الآتية بالترتيب الوارد

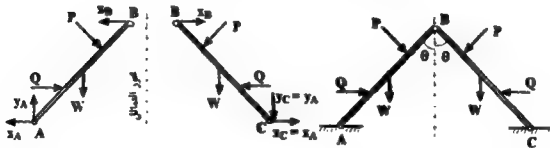
١ - البنية في الشكل المرسوم عن أحدها و الذي يفرض على ٣ مجاميل على الأكثر . فبالا وجد  
فسيه جسمًا واحدًا متزنًا و بكتابة ٣ معادلات التوازن يمكن إيجاد هذه المجاميل الثلاثة ثم نتقل  
على جسم آخر .

٢ - إذا لم يجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسة التوازن المجموعة القصلية كلها كلها إيجاد  
مجهول أو مجهولين على الأكثر ثم نتقل إلى أحد الأجسام الأخرى .

٣ - إذا لم تتمكن من إيجاد المجهول من دراسة التوازن المجموعة نحاول إيجاد معادلتين في مجهولين و عادة  
ما يكون هذان المجهولان هما مركبتي الفعل في القصل الداخلي .

## ١ - التماثل Symmetry :

يقال للجسم المتزن أنه تحت تأثير مجموعة من القوى أنه في حالة تماثل استاتيكي إذا توافر له التماثل  
الهندسي و التماثل في القوى الخارجة المؤثرة كما في الشكل .

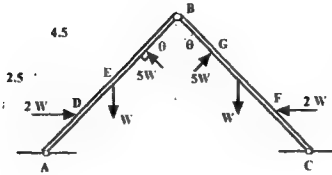


الجسمان متماثلان حول محور الخط الرأسي و يمكن الإستفادة من وجود التماثل كما يأتي :

- ١ - ردود الأفعال التي تنشأ في الإرتكازات المتماثلة تكون متماثلة مقداراً و اتجاهاً .
- ٢ - يكفي معالجة نصف واحد من المجموعة بحيث يكون نصفًا متماثلًا .
- ٣ - رد الفعل في القصل الداخلي الواقع على خط التماثل يكون عمودياً عليه أي تعتمد مركبته  
المنطقة على خط التماثل .



## مثال ٩ :



المجموعة المكونة من  
الجسمين AB و BC متزنة  
تحت تأثير القوى الموضحة في  
الشكل ، عين ردود الأفعال  
في المفصلات A , B , C اذا  
كان

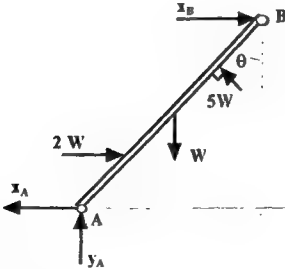
$$AB = BC = 10 \text{ ft}$$

$$\tan \theta = 3/4$$

$$AD = CF = 2.5 \text{ ft}$$

$$EB = GB = 3 \text{ ft}$$

الحل :



اجراء الحل على نصف  
المجموعة بدراسة اتزان AB ، الجسم  
AB يحتوي على ثلاثة مجاهيل فقط و  
هي  $x_A, y_A, x_B$

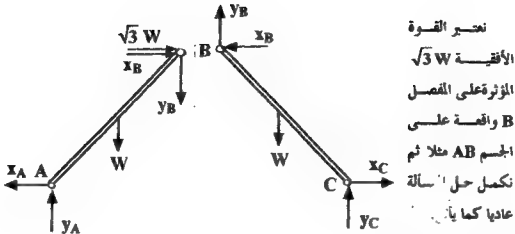
$$\sum M_A = 0$$

$$8x_B + 3W + 2W \times 2 = 5W \times 7$$

$$x_B = 7/2W$$



الحل :



أولا بدراسة اتزان المجموعة.

$$\sum M_C = 0$$

$$\sqrt{3}W \cdot 3\sqrt{3} + 6y_A = 1.5W + 4.5W$$

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

أي عكس الاتجاه المفروض.

$$\sum y = 0$$

$$y_A + y_C = W$$

$$y_C = 5/2W$$

بدراسة اتزان BC

$$\sum M_B = 0$$

$$3y_C + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$3\left(\frac{5}{2}W\right) + 3\sqrt{3}x_C = 1.5W$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

أي عكس الاتجاه المفروض.

$$\Sigma X = 0$$

$$x_B = x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3} W$$

$$\Sigma y = 0$$

$$y_B + y_C = W$$

$$y_B = -\frac{3}{2}W$$

من اتران AB

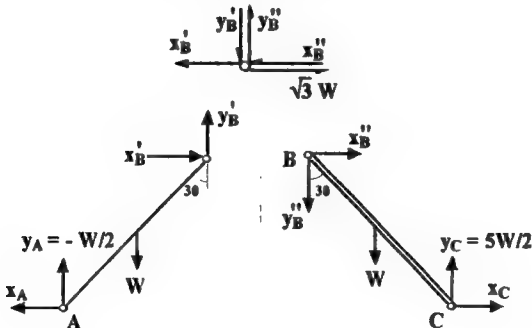
$$\Sigma x = 0$$

$$x_A = x_B + \sqrt{3}W$$

$$x_A = \frac{1}{3}\sqrt{3}W$$

حل آخر أدق :

في الحل السابق اعتبرنا الحمل  $\sqrt{3}W$  واقع على الجسم AB بينما هو في الحقيقة يقع على المسار B الذي يصل الجسمين AB و BC و لذلك سناخذ في هذا الحل اتران المسار B على حده تحت تأثير الحمل  $\sqrt{3}W$  وردود أفعال كل من AB و BC عليه (  $x_B', y_B', x_B'', y_B''$  ) ثم نأخذ اتران كل من الجسمين BC و AB كل على حده و بالطبع لن تتغير معدلات اتران المجموعة .



من التوازن المجموعة:

$$y_A = -\frac{1}{2}W$$

$$y_C = \frac{5}{2}W$$

من التوازن AB' :

$$\sum y = 0$$

$$y'_B + y_A - W = 0$$

$$y'_B = \frac{3}{2}W$$

$$\sum M'_B = 0$$

$$W \times \frac{3}{2} - Y_A(3) - X_A(3\sqrt{3}) = 0$$

$$x_A = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

$$\sum x = 0$$

$$x'_B - x_A = 0$$

$$x'_B = \frac{\sqrt{3}}{3}W$$

من التوازن CB'' :

$$\sum y = 0$$

$$y_C - W - y''_B = 0$$

$$y''_B = \frac{3}{2}W$$

$$\sum M_{B''} = 0$$

$$y_C(3) + x_C(3\sqrt{3}) - W(3/2) = 0$$

$$x_C = -\frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

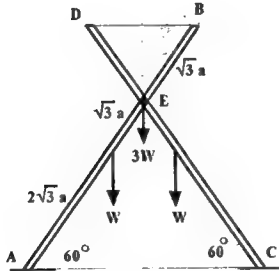
$$\sum x = 0$$

$$x_C + x_B'' = 0$$

$$x_B = \frac{2}{3}\sqrt{3}W$$

و يتضح للطالب أن نتائج هذا الحل تتفق و الحل السابق في الإرتكازات الخارجيه (  $y_C$  ,  $A$  ,  $C$  ) ، بينما تتباين عند المفصل  $B$  و يمكن تفسير ذلك بأنه في هذا الحل قد حللنا الحمل  $\sqrt{3}W$  المؤثر عند السمار  $B$  في المجموعة الى حلين أحدهما ( محصلة  $x_B'$  ,  $y_B'$  ) على الجسم  $AB$  و الآخر ( محصلة  $x_B''$  ,  $y_B''$  ) على الجسم  $BC$  عند دراسة اتزان كل من الجسمين على حده .

مثال ٣ :

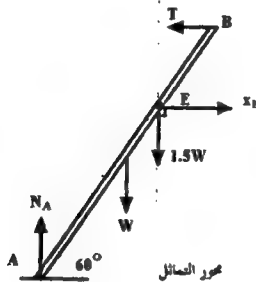


يرتكز اللوحان  $AB$  و  $CD$  على ارض افقية ملساء و يتصلان مفصليا في  $E$  . يحفظ اتزان اللوحين بحيط افقي  $BD$  و يؤثر حمل رأسي  $3W$  على المفصل كما في الشكل ، طول كل من اللوحين  $4\sqrt{3}a$  ووزنه  $W$  .

عين رد فعل الأرض عند كل من  $A$  ،  $C$  و كذلك الشد في الحيط ورد فعل المفصل  $E$  .

الحل :

اللوحان متماثلان حول الخط الراسي المار بالمفصل الداخلي E و القوة 3W تؤثر على المفصل لي E و منطقة على خط التماثل . نحل المسألة على نصف تماثل فقط كما يأتي :



بدلالة "توان AB

$$\sum Y = 0$$

$$N_A = W + 1.5W$$

$$N_A = 2.5W \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum M_E = 0$$

$$N_A \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{2} = W \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} + T \cdot \frac{3a}{2}$$

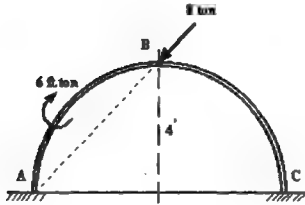
$$T = \frac{6.5}{3} \sqrt{3}W \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum X = 0$$

$$X_E = T = \frac{6.5}{3} \sqrt{3}W \dots \dots \dots (3)$$

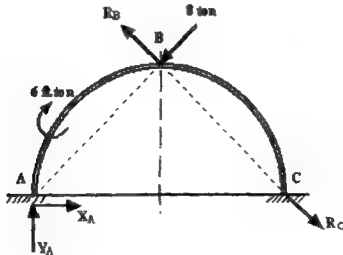
#### مثال ٤ :

عقد ثلاثي المفاصل ABC يؤثر عليه عزم ازدواج مقداره ٦ قدم طن وقوة ٨ طن كما في الشكل. عين ردود فعل المفاصل الثلاثة A و B و C.



الحل :

القوة ٨ طن المؤثرة على المفصل B يمكن اعتبارها واقعة على AB و بذلك يصبح BC وصلة خفيفة و ينشأ عند B رد فعل RB و كذلك عند C رد فعل RC .  $RC = -RB$





$$\sum M_A = 0$$

$$6 = 4\sqrt{2}R_B$$

$$R_B = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$X_A = 8 \cos 45 + R_B \cos 45$$

$$X_A = \left( \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right) \text{ ton}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_A = 8 \sin 45 - R_B \sin 45$$

$$= \left( \frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \right) \text{ ton}$$

$$R_C = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ ton}$$

### ملاحظات عامة:

١ - عند الانتقال من جسم إلى جسم يراعى سريان قانون الفعل ورد الفعل على ما بين الجسمين من ردود الفعل (لكل فعل رد فعل مساو في المقدار ومضاد في الاتجاه).

٢ - إذا أثرت قوة على مفصل داخلي - عند الفصل تصبح القوة والقمة على أحد الأجسام المتصلة بالمفصل المحمل.

٣ - التماثل الاستاتيكي في أنظمة مجموعة الأجسام حول محورها. يلزم أن يتوفر فيه شرطين هما:

أ - تماثل هندسي (زوايا + أبعاد)

ب - تماثل في القوى الخارجة المؤثرة.

في هذه الحالة يكفى بدراسة نصف أجسام المجموعة فقط مع مراعاة عدم قطع أجسام (يمكن قطع الخيط الخفيف أو القضيب الخفيف أو الركيزة البندولية) ويلاحظ أنه نتيجة للتناثل يتبع ذلك تماثل في ردود الأفعال.

٤ - المفصل الواقع على محور التماثل Symmetry axis يسمى مفصل تماثل. رد فعل مفصل التماثل يكون عمودي على محور التماثل أي تعدم مركبته المنطقية على محور التماثل.

٥ - إذا كان مفصل التماثل محمل - فعند الفصل نأخذ نصف الحمل فقط.

٦ - حل مسائل المجموعات المفصلية تتبع الخطوات الآتية:

أ - نبحث عن شكل به ثلاث مجاهيل على الأكثر. فإذا وجدنا مثل هذا الشكل نعتبره جسماً واحداً متزاناً بكتابة ثلاث معادلات اتزان له. يمكن إيجاد هذه المجاهيل الثلاثة ثم ننقل إلى جسم آخر.

ب - إذا لم نجد الجسم المذكور في الخطوة الأولى نحاول من دراسة اتزان المجموعة المفصلية كلها إيجاد مجهول أو مجهولين ثم ننقل إلى أحد الأجسام الأخرى.

ج - إذا لم تتمكن من إيجاد أي مجهول من دراسة اتزان المجموعة نحاول إيجاد معادلتين في مجهولين.

د - إذا نتجت قيمة أي من المجاهيل بالسالب فمعنى ذلك أن الاتجاه الصحيح هو عكس ما فرضناه ولا يلزم إعادة الحل بل يكفى بإشارة المجهول التي تدل على اتجاهه الصحيح.

مثال ٥ :

أربعة قضبان متساوية ثقيلة طول كل منها  $a$  ووزنه  $W$  ترتبط مفصلياً لتؤلف هيكل مربعاً ABCD يحفظ شكل المربع قضيب خفيف BD. علق الهيكل من A كما في الشكل أوجد ردود فعل المفاصل والضغط في القضيب الخفيف BD. حل تحليلياً وبيانياً

الحل التحليلي:

دراسة اتزان المجموعة كلها (مجموعة متماثلة)

$$\sum Y = 0$$

$$P - W - W - W - W = 0$$

$$\therefore P = 4W$$

الوزن المعلق BC

$$\sum M_B = 0$$

$$X_C \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \right) + W \left( \frac{A}{2\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\therefore X_C = -\frac{W}{2}$$

$$\sum X = 0$$

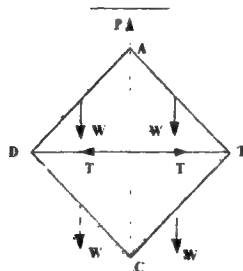
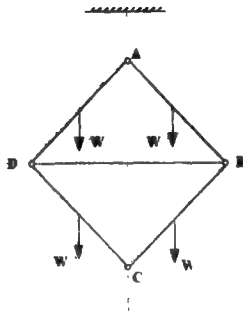
$$X_C - X_B = 0$$

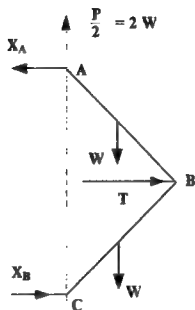
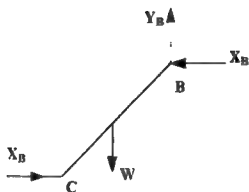
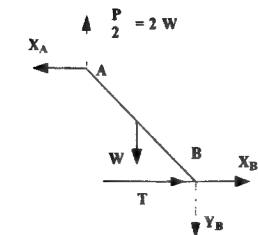
$$\therefore X_B = -\frac{W}{2}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B - W = 0$$

$$Y_B = W$$





اتزان المعضن AB

$$\sum M_A = 0$$

$$-W\left(\frac{A}{2\sqrt{2}}\right) + T\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) + X_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) - Y_B\left(\frac{A}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore T = 2W$$

$$\sum X = 0$$

$$-X_A + T + X_B = 0$$

$$X_A = 1.5W$$

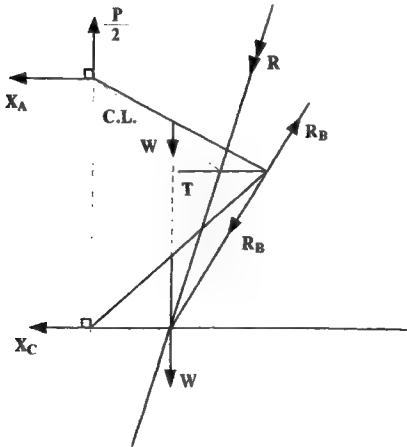
ملخص الأجوبة:

A	B	C	
$X_A = 1.5W$	$X_B = -\frac{W}{2}$	$X_C = -\frac{W}{2}$	$T = 2W$
$Y_A = 4W$	$Y_B = W$	$Y_C = 0$	ساند

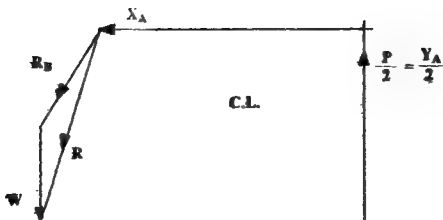
الحل البياني:

مقياس رسم المسافات:  $1\text{ cm} = \frac{a}{6}$  ومنها  $a = 6\text{ cm}$

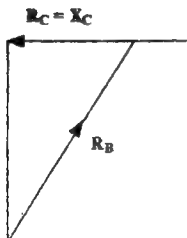
مقياس رسم القوى  $1\text{ cm} = \frac{W}{6}$  ومنها  $mc \text{ t} = W$



شكل (أ)



شكل (ج)



شكل (ب)

شكل (أ) يمثل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل كله وعلى كل قضيب على حده. شكل (ب) يمثل مثلث القوى لاتزان القضيب BC، شكل (ج) يمثل مخطط القوى لاتزان القضيب AB

النتائج: من الرسم وبالقياس

$$R_C = 0.5 W$$

$$R_B = 1.2 W$$

$$T = 2 W$$

$$X_A = 1.5 W$$

$$Y_A = 4 W$$

$$P = 4 W$$

مثال ٦ :

الهيكل المصلي يتألف من أربع قضبان خفيفة AB ، BC ، AD ، DE ومزتر علىه بقوة أفقية 2W عند المفصل A كما في الشكل (أ)، عين ردوده فعل المفصل. حل تحليليا وبيانياً

الحل التحليلي: شكل (ب)

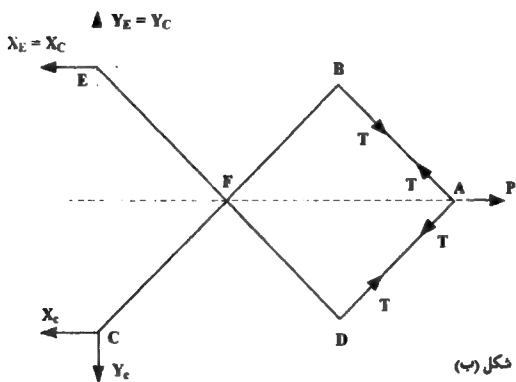
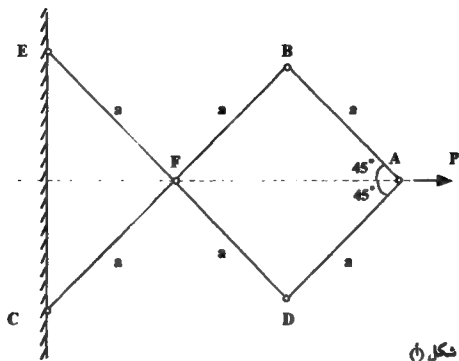
القضبان AD ، AB يعتبران وصلتان خفيفتان نستبدل كل واحد منهما بقوة محورية (شد أو ضغط في اتجاهه) ونظرا للتماثل تكون القوتان أيضا متماثلتان ولذلك يمكن إجراء الحل على قضيب واحد متماثل BC ، DE مع ملاحظة أن المفصل F مفصل غائل داخلي. لاحظ كذلك أن كلا من BC ، DE لا يمكن اعتباره غير محمل نظراً لوجود ثلاث مفاصل به (محمل برد فعل المفصل F)

اتزان المفصل A: شكل (ج)

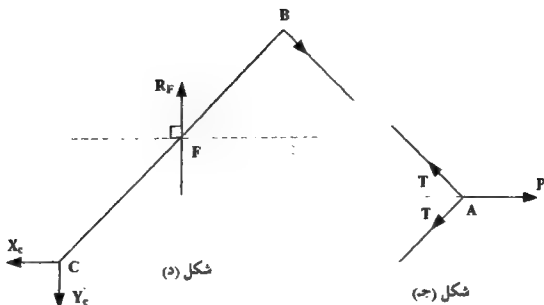
$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ 2T \cos 45^\circ - P &= 0 \\ \therefore T &= \frac{P}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

اتزان القضيب BC شكل (د)

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \\ R_F \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) - T(2a) &= 0 \\ R_F &= 2P \\ \sum X &= 0 \\ -X_C + \frac{T}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \therefore X_C &= \frac{P}{2} \\ \sum Y &= 0 \\ -Y_C + R_F - \frac{T}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \therefore Y_C &= 1.5P\end{aligned}$$







ملخص الأجوبة:

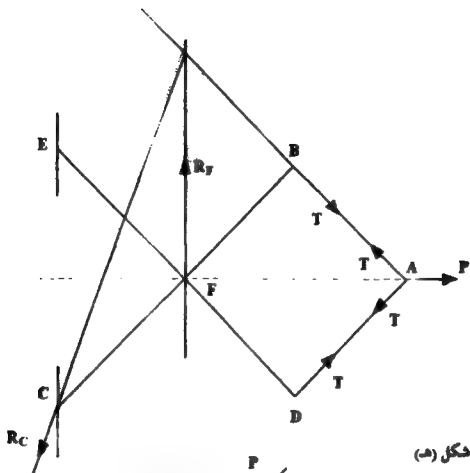
C	F	AB
$X_C = \frac{P}{2}$	$X_F = 0$	$T = \frac{P}{\sqrt{2}}$
$Y_C = \frac{3P}{2}$	$Y_F = 2P$	شداد

الحل البياني.

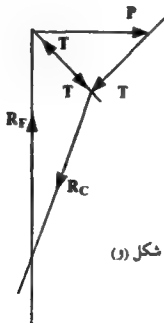
مقياس رسم المسافات  $a = 4 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = 0.25 a$

مقياس رسم القوى  $P = 5 \text{ cm}$  ومنها  $1 \text{ cm} = 0.2 P$

شكل (هـ) يمثل شكل خطوط العمل للقوى المؤثرة على الهيكل، شكل (و) يمثل مضلع القوى  
لاتزان المفصل A والقضيب BC



شكل (د)



شكل (ج)

النتائج: من الرسم وبالقياس:

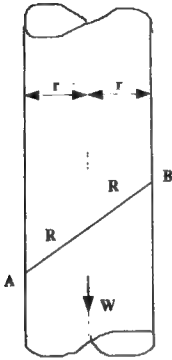
$$T = 0.7 P$$

$$R_F = 2 P$$

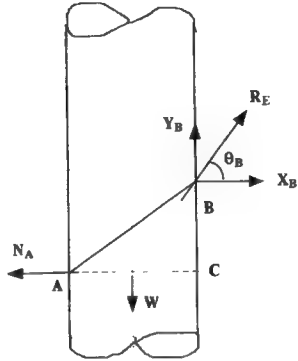
$$R_C = 1.6 P$$

## مثال ٧ :

حلقة رفيعة وزنها  $W$  ونصف قطرها  $R$  وضعت حول اسطوانة دائرية محورها رأسي ونصف قطرها  $r$  حيث  $(R > r)$  ومنع الحلقة من السقوط مسمار أفقي مثبت في الاسطوانة استندت عليه الحلقة كما في الشكل (١٦١) أوجد الضغط الأفقي بين الحلقة والاسطوانة وكذلك رد فعل المسمار على الحلقة مقداراً واتجهاً.



شكل (أ)



شكل (ب)

الحل التحليلي:

نضع ردود الأفعال على الحلقة لم نكتب معادلات الاتزان كما في الشكل (١٦٢) يؤثر على الحلقة أربعة قوى واقعة في مستوى واحد هي  $N_A$  ،  $W$  ،  $Y_B$  ،  $X_B$ .

$$\sum X=0$$

$$X_B - N_A = 0$$

$$\sum Y=0$$

$$Y_B - W = 0$$

$$\therefore Y_B = W$$

$$\sum M_C = 0$$

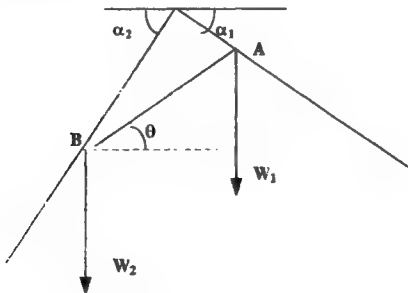
$$-X_B (BC) + W(r) = 0$$

$$\therefore X_B = W \frac{r}{\sqrt{(2R)^2 - (2r)^2}} = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

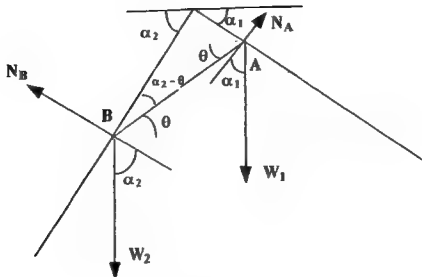
$$N_A = X_B = \frac{Wr}{2\sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \frac{W}{2} \sqrt{\frac{4R^2 - 3r^2}{R^2 - r^2}}$$

$$\tan \theta_B = \frac{Y_B}{X_B} = \frac{2\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

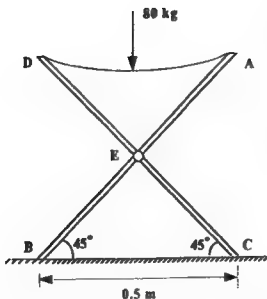


شكل (ج)



شكل (د)

مثال ٨ :



يجلس شخص وزنه ٨٠ كجم على كرسي شاطئ كاليمين بالشكل ويتخذ قماش القاعدة شكل قوس دائري يقابل زاوية مركبة قدرها  $60^\circ$  عين القوى المؤثرة على زوج الأرجل AB

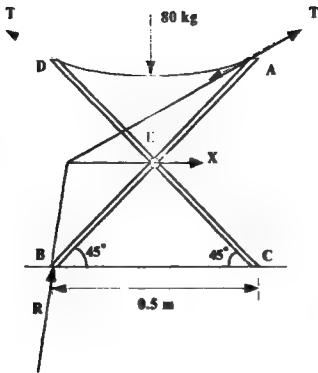
اتزان القماش

القوى المؤثرة هي وزن الرجل والشدان المتماثلان  $T$ ،  $T$  والمماسان لمنحنى القماش في A ،  
D (الموضحة بخطوط منقطعة) بالتحليل رأسياً نحصل على قيمة  $T$

$$2 T \cos 60^\circ = W$$

$$\therefore T = W = 80 \text{ kg}$$

## اتزان الرجل AB



القوى المؤثرة هي معكوس  
الشدة  $T$  في نقطة  $A$ ، رد فعل  
مفصل التماثل  $E$  وهو  $X$  ورد  
لفعل الأرض  $R$ . لاتزان القوى  
الثلاثة يجب أن نلقي في نقطة  
واحدة برسم مثلث قوى لها  
مبتدئين بالقوة المعلوم  $T$  نعين  
 $R$  ،  $X$

وأما تحليلها فسطحي العزوم  
حول  $B$  قيمة  $X$

$$X \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = T 2a \sin 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore X &= W 2\sqrt{2} \sin (45 - 30) \\ &= W 2\sqrt{2} (\sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30) \\ &= W (\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

ثم بالتحليل أفقياً ورأسياً نحصل على مركبي  $R$

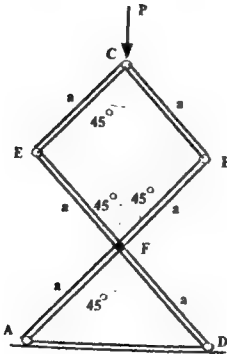
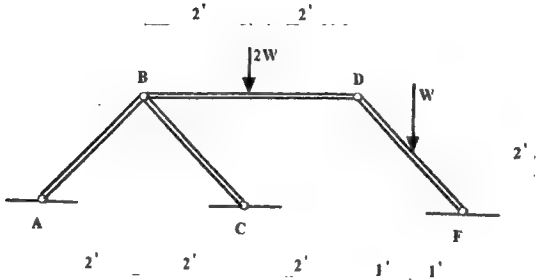
$$R_x + X - T \cos 30^\circ = 0$$

$$R_y - T \cos 60^\circ = 0$$

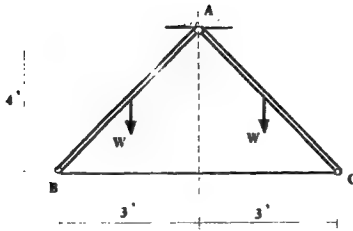
$$\therefore R_x = W \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right), R_y = \frac{W}{2}$$

## تمارين

١ - أوجد ردود الفعل في مفاصل الهيكل المين بالشكل تحليليا.



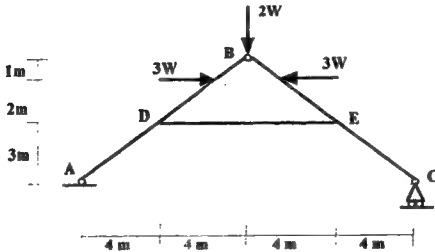
٢ - الهيكل المفصلي المين بالشكل يتكون من أربعة قضبان AB و BC و DE و EC ترتبط مفصليا كما في الشكل و ترتكز عند A و D على ارض افقية ملساء و يحفظ اتزانها بحيط غير مرن AD . تؤثر القوة P رأسيا لأسفل على المفصل C . عين الشد في الحيط .



٣ - الهيكل المفصلي المبين بالشكل يتكون من قضيتين وزن الواحد  $W$  وطوله ٥ أقدام معلقان من نقطة  $A$  و يحفظ اتزانهما قضيب خفيف  $BC$ . عين رد فعل المفصل  $A$  والقوة المحورية في  $BC$ .

٤ - للمنشأ المبين بالشكل عين ردود الأفعال في المفصلات  $B$  و  $A$  و عند الإرتكاز الحر  $C$  وكذلك الشد في الحيط  $DE$ .

حيث أن وزن  $W = BC = AB$

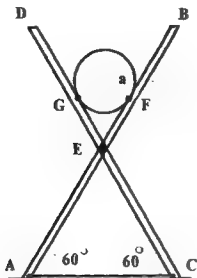




٥ - لوحان خفيفان الملسان AB, CD يصلان مفصلياً في E و يرتكزان على ارض ملساء. AC

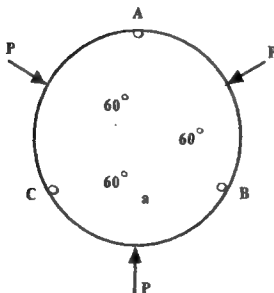
خييط خفيف يربط طرفيهما المرتكزين على الأرض .

يحمل اللوحان كرة وزنها W ونقطة W نصف قطرها a .



علماً بأن طول  $EC = ED$  ,  $EA = EB$

و طول  $GE = DG$  ,  $EF = BF$



٦ - حلقة دائرية نصف قطرها a موضوعة

على تضاد أفقي أملس ويتألف من

ثلاثة أعضاء CA و BC و AB و

تؤثر عليهما الأحمال المبينة بالشكل

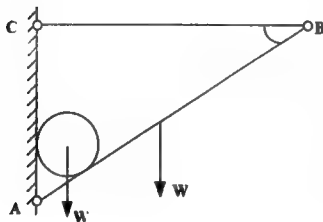
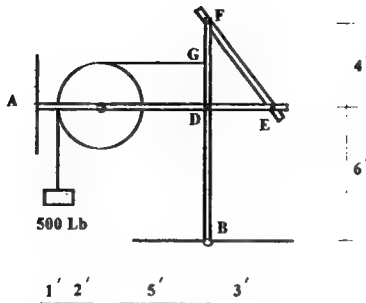
عين ردود الأفعال في المفصل B و C

و A .

٧ - هيكل مفصلي كالبيان بالشكل يستند لحائط أملس عند A مرتكزاً مفصلياً عند B و مركب عليه

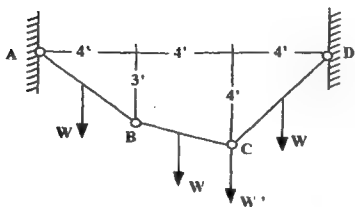
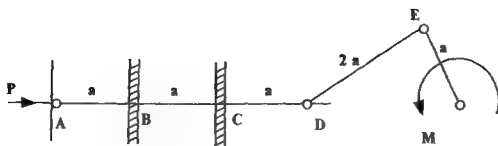
بكرة خفيفة ملساء C يمر عليها خييط متصل بالهيكل عند G أوجد ردّي الفعل في A , B و جميع

القوى المؤثرة على الكمرة ACDE .

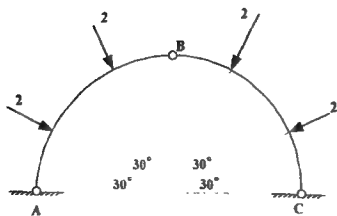


٨ - تسطر اسطوانة ملساء وزنها  $W$   
ونصف قطرها  $a$  بين حائط رأسي  
ولوح ألمس  $AB$  وزنه  $W$   
وطوله  $(4\sqrt{3}a)$  واللوح  
يتصل بالحائط مفصليا في  $A$   
ويشده إليها غيط خفيف أفقي  
 $CB$  عين شد الحيط وردود  
الفعل على اللوح.

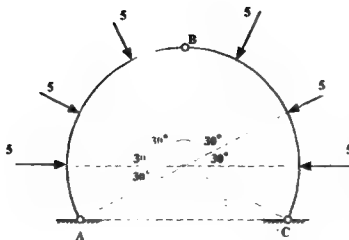
٩ - الشكل المرفق عبارة عن كروكي لآلة ترددية بسيطة في أحد أوضاعها عين العزم  $M$  على المرفق بدلالة ضغط البخار  $P$  على مكبها.



١٠ - ثلاثة قضبان ثقيلة  
وزن كل منها  $W$  متصلة  
في  $C$  ،  $B$  ، وعمولية  
بفصلان ثابتان  $A$  ،  $D$   
يؤثر في  $C$  حمل رأسي  
 $W$  عين بالطرق  
استحليلية مقدار رأسي  
 $W'$  بدلالة  $W$ .



١١ - عقد متماثل ثلاثي  
المفاصل على شكل  
نصف دائرة نصف  
قطرها  $2$  م تؤثر على  
العقد مجموعة القوى  
التساوية المركزية  
المبينة في الشكل. عين  
تحليلياً وبياناً ردود  
فعل المفاصل الثلاثة  
.  $A, B, C$



١٢ - عقد ثلاثي المفاصل

على شكل ثلثي

دائرة نصف قطرها

٤ م . تؤثر على

العقد مجموعة القوى

المساوية المركزية

المبينة في الشكل.

عين تحليلياً وبيانياً

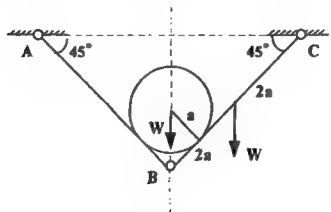
ردود فعل المفاصل

الثلاثة A, B, C.

١٣ - ترتكز كرة لمساء وزنها W ونصف قطرها a على لوحين أملسين AB و BC وزن كل منها

W وطوله 4a ، اللوحان يتصلان مفصلياً في B ومعلقان من مفصلين ثابتين A و C كما في

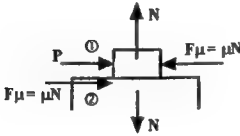
الشكل عين ردود فعل المفاصل الثلاثة تحليلياً وبيانياً.





## الإحتكاك

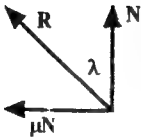
إذا ارتكزا سطحين عشرين على بعضهما بدون أدنى حركة نسبية فيكون هناك قوتا رد لفعل عموديتين فقط.



عند توليد حركة نسبية بين الجسمين وذلك بالتأثير على أحدهما بقوة  $P$  مثلاً فعند سطح التماس يتولد قوتان  $F$  في عكس الاتجاه قابلية الحركة تسمى القوة  $F$  مقاومة الإحتكاك وتصل إلى أقصى قيمة لها  $F_{\mu}$  عندما يوشك الجسم على الحركة ،

وتسمى أيضاً بقوة الإحتكاك النهائي وهي عادة تتناسب مع رد الفعل العمودي بين السطحين  $N$  . حيث  $\mu$  تسمى معامل الإحتكاك وهي قيمة ثابتة لكل سطحين معينين ومعامل الإحتكاك قبل حدوث الحركة  $<$  الإحتكاك بعد حدوث الحركة ( معامل الإحتكاك الإستاتيكي )  $<$  ( معامل الإحتكاك الكيناتيكي )

### ١ - زاوية الإحتكاك :



لو كان هناك جسم على وشك الانزلاق فإن محصلة رد الفعل عليه  $R$  تكون عبارة عن رد الفعل العمودي  $N$  وقوى الإحتكاك  $\mu N$

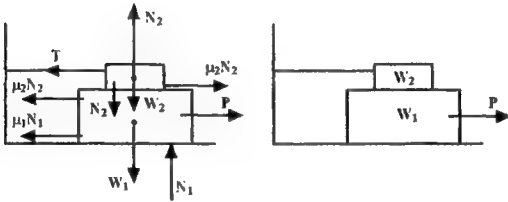
والزاوية  $\lambda$  التي يصنعها رد الفعل المحصل  $R$  مع رد الفعل العمودي  $N$  تسمى زاوية الاحتكاك.

$$\tan \lambda = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

أي أن معامل الاحتكاك يساوي ظل زاوية الاحتكاك.

## مثال ١ :

كتلة وزنها  $W_1$  تستقر على سطح أفقي ومعامل الاحتكاك بينها وبين السطح يساوي  $\mu_1$  وضعت كتلة أخرى  $W_2$  فوق الكتلة الأولى وربطت بواسطة خيط أفقي كما في الشكل . معامل الاحتكاك بين الكتلتين  $\mu_2$  . عين أقل قوة  $P$  تلزم لتحريك الكتلة  $W_1$  ثم عين الشد في الخيط عندئذ.



الحل :

لإيجاد  $P$  ندرس إتران الكتلة  $W_1$

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu_2 N_2 + \mu_1 N_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_1 = N_2 + W_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$\Sigma y = 0$$

$$N_2 = W_2$$

وبالتعويض في (1) ، (2)

$$P = \mu_2 W_2 + \mu_1 (W_2 + W_1)$$

ولإيجاد  $T$  ندرس إتزان الكتلة  $W_2$

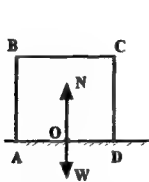
$$\Sigma x = 0$$

$$T = \mu_2 N_2$$

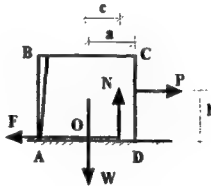
$$T = \mu_2 W_2$$

## ٢ - الإنزلاق والإنقلاب:

عند وضع جسم له أبعاد معلومة لا يمكن إهمالها على سطح أفقي حشن بدون تأثير أي قوة خارجية فإن الجسم يزن تحت تأثير وزنه  $W$  ورد الفعل العمودي  $N$  بحيث  $N = W$  والقوتان على خط عمل واحد يمر بنقطة  $O$ .



حالة إتزان دون  
حدوث أي محاولة للحركة



محاولة حركة الجسم  
 $c < a$  ,  $F < \mu N$

عند تحريك الجسم بواسطة  $P$  قوة أفقية يحدث شيطان في نفس الوقت وهما:

١ - تولد قوة الاحتكاك  $F$  بحيث نحاول أن نمنع الجسم من الانزلاق وتكون قيمتها  $F = P$ .

٢ - يتحرك رد الفعل العمودي  $N$  من نقطة  $O$  نحو نقطة  $D$  وذلك لمنع الجسم من الانقلاب أو الدوران تبعاً للمعادلة الآتية :

$$\sum M_o = 0$$

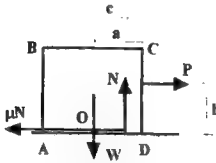
$$N \cdot C = P \cdot h$$

حيث  $N$  تساوي  $W$

بمحاولة تحريك الجسم بزيادة قيمة القوى  $P$  وتبعاً للمعادلتين

$$F = P , \quad N \cdot C = P \cdot h$$

نجد أن كلا من  $F$  ،  $C$  تزيد بزيادة  $P$  ، ومع زيادة  $P$  قد يحدث أحد الاحتمالات الآتية:



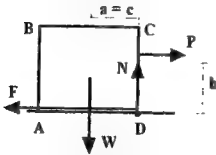
على وشك الانزلاق

$$c < a , F = \mu N$$

١ - تصل قوة الاحتكاك  $F$  إلى قيمتها العظمى

$\mu N$  قبل أن يصل  $N$  إلى نقطة  $D$  وعندئذ

يبدأ الجسم في الانزلاق قبل الانقلاب.



على وشك الانقلاب

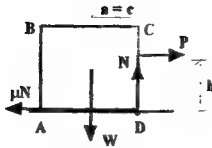
$$c = a , F < \mu N$$

٢ - يصل خط عمل  $N$  إلى نقطة  $D$  (  $c = a$  )

قبل أن تصل  $F$  إلى قيمتها العظمى  $\mu N$

وعندئذ يبدأ الجسم في الانقلاب حول  $D$  قبل الانزلاق.



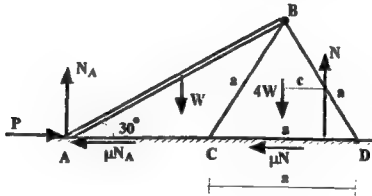


٣ - تصل قوة الاحتكاك  $F$  إلى قيمتها العظمى  $\mu N$  في نفس اللحظة التي يصل فيها خط عمل  $N$  إلى نقطة  $D$  وعندئذ يبدأ الجسم في الإنزلاق والإنقلاب حول  $D$  معا.

على وشك انزلاق و انقلاب  
 $c = a, F = \mu N$

مثال ١ :

لوح  $AB$  وزنه  $W$  يتصل مفصليا في  $B$  بثلاثي  $BCD$  وزنه  $4W$  ويستقران على أرض خشنة معامل احتكاك يساوي  $\sqrt{3}/8$ . أوجد القوة الأفقية  $P$  اللازمة لإحداث الإنزلاق وأثبت أن الثلاثي لا ينقلب في هذه الحالة .



الحل :

بمراة الإتزان للمجموعة

$$\sum x = 0$$

$$P = \mu(N_A + N)$$

$$\sum y = 0$$

$$N_A + N = 5W$$

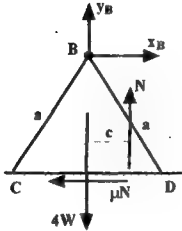
$$\therefore P = 5\mu W$$

$$\therefore \mu = \sqrt{3}/8$$

$$P = \frac{5\sqrt{3}}{8} W$$

لإثبات أن المنشور لا يتقلب يجب إثبات أن  $c \leq \frac{1}{2}a$ .

بدراسة إتران المنشور فقط



$$\sum M_B = 0$$

$$N \cdot C = \mu \cdot N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$C = \frac{3}{16}a$$

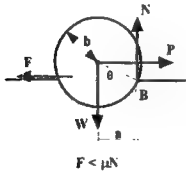
وهذا يعني أن المنشور لا يتقلب حيث أن  $C < \frac{1}{2}a$ .

### ٣ - مقاومة التدحرج:

نشأ عن تدحرج إسطوانة أو كره أو عجله على سطح مخشن . قد يحدث تفرطح أو إنبعاج في الكره أو الإسطوانة نتيجة أن أي من الأرض أو الإسطوانة غير متكافئ تامي الصلابة .

وإذا كانت صلابتهما تامه بحيث لا يحدث أي قدر من التفرطح فإن التماس بينهما يكون على راسم في الإسطوانة ( يظهر نقطة واحدة على الشكل ) أو نقطة تماس واحدة بين الكره المتدحرجة والسطح و لكفت أي قوة سحب صغيرة P لإحداث التدحرج .

ويمكن إعتبار التحرج مجموعة إنقلابات متلاحقة عند B التي تسكن لحظيا وتقلب حول الإسطوانة بحيث تتغير B باستمرار على سطح الإسطوانة ويكون طول القوس على سطح الإسطوانة مساويا لطول المسافة المقطوعة على الأرض.



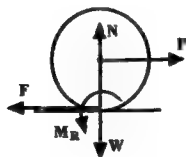
وهذا يعني أن  $F$  لا تصل إلى  $\mu N$  ، وبكتابة معادلة الإرتان على الشكل :

$$F = P$$

$$N = W$$

$$P \cdot b \cos \theta = N \cdot a \quad \therefore P = \frac{Wa}{b \cos \theta}$$

نظرا لأن  $\theta$  صغيره جداً فإن  $\cos \theta = 1$



$$\therefore P = W \frac{a}{b}$$

و المسافة  $a$  تسمى عادة ذراع مقاومة التدحرج  $M_R = N \cdot a$

مثال ٩ :

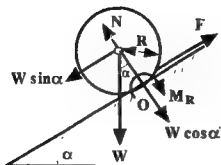
اسطوانة نصف قطرها  $R$  ووزنها  $W$  وحتت على مسوى مائل خشن زاوية ميله على الأفقي صغيرة و مقدارها  $\alpha$  فبدأت الأسطوانة في التدحرج بانتظام هابطه إلى أسفل المسوى المائل بتأثير وزنها. عين ذراع مقاومة التدحرج ثم عين القوة  $P$  التي اذا أُلزمت في مركز الأسطوانة موازيه للمسوى المائل لتدحرجت الأسطوانة صاعده المسوى بسرعه منتظمه .

الحل :

أولاً في حالة الفبوط :

بالتحليل عمودي على اتجاه المسوى المائل

$$N = W \cos \alpha \quad (1)$$



ثم بأخذ العزوم حول O

$$W \sin \alpha \cdot R = N \cdot a = M_R \quad (2)$$

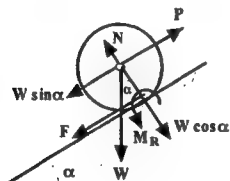
بحل (1) و (2) لي a ينتج

$$W \sin \alpha \cdot R = W \cos \alpha \cdot a$$

$$a = R \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad a = R \tan \alpha \quad (3)$$

ثانيا في حالة الصعود :

بأخذ العزوم حول O



$$M_O = P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + M_R$$

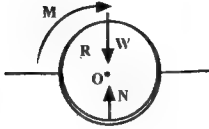
$$P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + W \cos \alpha \cdot a$$

و بالتعويض من المعادلة (3) ينتج :

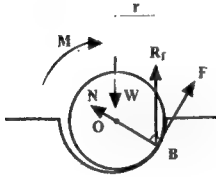
$$P \cdot R = W \sin \alpha \cdot R + W \cos \alpha \cdot R \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$P = 2W \sin \alpha$$

## ٤ - إحتكاك المحاور:



المحور هو عبارة عن جسم اسطواني يؤثر عليه حمل ويمكن ادارته عن طريق التأثير عليه بعزم دوران . ويرتكز على كرسي محور حيث يوجد بينه وبين المحور خلوص .

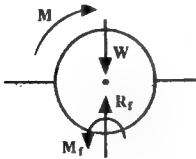


في عدم وجود أي خشونة في المحور أو الحامل فإنه أقل عزم دوران  $M$  تكفي لإدارة المحور .

نظراً لوجود قدر من الخشونة في المحور وحامله فإن قوة مقاومة الإحتكاك  $F$  تظهر على المحور بحيث تقاوم الدوران و تمر  $F$  بنقطة التماس بين المحور والحامل ( راسم تماس ) التي تتقدم قليلاً لتسمح لردود الفعل من توليد عزم إحتكاك مقاوم للدوران .

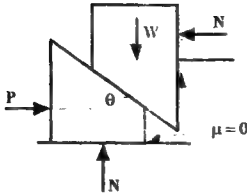
بتغير اتجاه الحمل  $W$  يتغير أيضاً اتجاه  $R_f$  وتظل المسافة  $r$  ثابتة وتسمى  $r$  بنصف قطر دائرة إحتكاك المحور .

يمكن إعادة  $R_f$  الى مركز المحور  $O$  موازية لنفسها مع اضافة عزم ازدواج  $M_f$  يسمى عزم إحتكاك



المحور و هو مضاد لعزم الإدارة  $M$  و يساويه في المقدار حيث  $M_f = M = W \cdot r$  ويمكن تقليل عزم مقاومة الإحتكاك وكذلك عزم الدوران عن طريق تقليل قوة الإحتكاك  $F$  وبالتالي يقلل  $M_f$  عن طريق التزييت أو التشحيم .

## ٥ - الأسفين :



هو عبارة عن آلة بسيطة تعتمد في عملها أساساً على الاحتكاك . و يستعمل عادة لرفع حمل معين أو لفرز حزم جسيمين عن بعضهما .

يتضح من اتزان المجموعة أن

$$N = W \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma y = 0$$

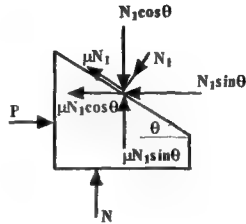
$$N_1 \cos \theta - \mu N_1 \sin \theta = N$$

$$N_1 = \frac{W}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma x = 0$$

$$P = \mu N_1 \cos \theta + N_1 \sin \theta \dots\dots\dots (3)$$

بالعويض من ( 2 ) في ( 3 ) ينتج أن



$$P = W \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \dots\dots\dots (4)$$

المعادلة ( 4 ) تعطي أقل قوة P تلزم لرفع الحمل W الى أعلى . و يتضح من هذه المعادلة أنه كلما زادت زاوية رأسي الاسفين θ فإن الكمية (  $\cos \theta - \mu \sin \theta$  ) تقل و بالتالي تزيد القوة p اللازمة لرفع W . و يستحيل رفع الحمل اذا وصلت الكمية (  $\cos \theta - \mu \sin \theta$  ) الى الصفر أي اذا كان :

$$\cos \theta = \mu \sin \theta$$

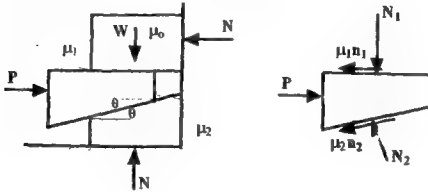
$$\mu = \cot \theta$$

و عندها نؤول P الى اللانهاية .

مثال :

يستعمل الأسفين الموضح بالشكل لرفع الحمل  $W$  . معامل الإحتكاك بين الأسفين و الحمل  $\mu_1$  و بين الأسفين و الكتلة السفلى  $\mu_2$  و اعتبر الحائط أملس عىن القوة  $P$  اللازمة لرفع الحمل  $W$  اذا كان :

$$W = 8000 \text{ lb} , \mu_1 = 0.3 , \mu_2 = 0.1 \text{ and } \theta = 10^\circ$$



الحل :

من اتزان الحمل نلاحظ .

من التحليل الراسى للأسفين :

$$N_1 = W$$

$$N_1 = N_2 \cos \theta - \mu_2 N_2 \sin \theta$$

$$N_2 = \frac{W}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta}$$

من التحليل الأفقي :

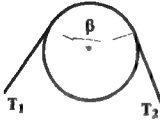
$$P = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 \cos \theta + N_2 \sin \theta$$

$$P = W \left( \mu_1 + \frac{\mu_2 \cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \mu_2 \sin \theta} \right)$$

$$P = W \left( \mu_1 + \frac{\mu_2 + \tan \theta}{1 - \mu_2 \tan \theta} \right)$$

$$P = 4650 \text{ lb}$$

## ٦ - احتكاك الحبال أو السيور :



لو أن حبلًا أو سيرا يلتف حول محيط أسطوانة خشنة ثابتة بحيث يحمصر زاوية مركزية  $\beta$  وكان الشد في أحد طرفي  $T_1$  و في الطرف الآخر  $T_2$  ومعامل الاحتكاك بين الحبل والإسطوانة  $\mu$  .

$$T_2 = T_1 e^{\mu \beta}$$

مثال ١ :

يراد منع وزن قدره ١٠٠٠ كغم من الهبوط وذلك عن طريق ربطه بحبل و لف الحبل حول أسطوانة ثابتة خشنة . إذا كان معامل الاحتكاك بين الحبل و الأسطوانة  $\mu = \frac{1}{2}$  و لف الحبل مرتين على سطح الإسطوانة ، فعين القوة اللازمة لمنع الحمل من الهبوط .

الحل :

$$\mu = 1/2$$

$$\beta = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

$$T_2 = 1000 \text{ kg}$$

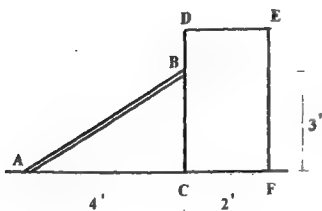


$$\text{Then } T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$$

$$1000 = T_1 e^{1/2 \cdot 4\pi}$$

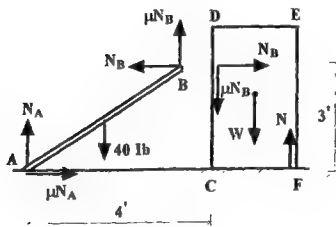
$$T_1 = \frac{1000}{e^{2\pi}} = 1.867 \text{ kg}$$

مثال ٢ :



قضيب منظم AB وزنه ٤٠ باوند يتركز على أرض خشنة و على كتله مستطيله المقطع CDEF بنفس الحشونه كما في الشكل . اذا كان القضيب على وشك الإنزلاق و الكتله على وشك الانقلاب . أوجد معامل الاحتكاك ، وزن الكتله W .

الحل :



$$\Sigma X = 0$$

$$N_B = \mu N_A \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_A + \mu N_B = 40 \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$40 \times 2 = 3N_B + 4\mu N_B \dots\dots\dots (3)$$

يحل (1) ، (2) ، (3) في المجاميل الثلاثة  $N_B$  ،  $N_A$  ،  $\mu$  ينتج :

$$\mu = 1/2$$

$$N_B = 16 \text{ lb}$$

$$N_A = 32 \text{ lb}$$

ثم بدراسة اتران الكتلة :

$$\Sigma M_P = 0$$

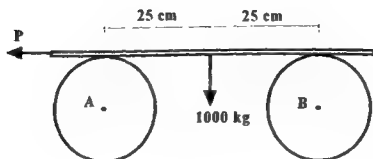
$$W \cdot 1 = 3 N_B - 2\mu N_B$$

$$W = 32 \text{ lb}$$

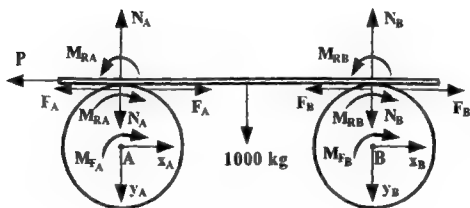
مثال ٣ :

يستعمل الجهاز المين بالشكل داخل المصانع لجر الألواح الثقيلة و ذلك عن طريق وضعها على عجلتين خفيفتين مركبتين على محورين ثابتين A ، B في مستوى أفقي واحد ثم شد اللوح بقوة أفقية P . و المطلوب حساب قيمة P اذا كان :

وزن اللوح ١٠٠٠ كجم ، ذراع مقاومة التدرج بين اللوح و كل من العجلتين = ٢٥ سم ،  
 نصف قطر دائرة احتكاك المحور عند A ، B يساوي ٢٥ سم ، نصف قطر العجلة ١٠ سم و المسافة  
 بين المحورين ٥٠ سم .



الحل :



من اتزان اللوح :

$$\Sigma X = 0$$

$$P = F_A + F_B$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$N_A + N_B = 1000$$

من اتران المعجلة A :

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_A \times 10 = M_{RA} + M_{FA}$$

$$M_{RA} = 1/4 N_A$$

$$M_{FA} = 1/4 Y_A$$

$$10 F_A = 1/4 (N_A + Y_A) \dots\dots\dots (1)$$

وكذلك من اتران المعجلة B و العزم حول B :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$10 F_B = M_{RB} + M_{FB}$$

$$10 F_B = 1/4 (N_B + Y_B) \dots\dots\dots (2)$$

يجمع (1) ، (2) ينتج :

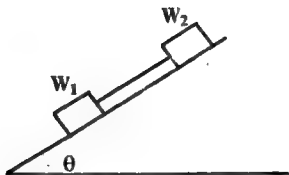
$$\begin{aligned} F_A + F_B &= 1/40 (N_A + y_A) + 1/40 (N_B + y_B) \\ &= 1/40 (N_A + N_B) + 1/40 (y_A + y_B) \\ &= 1/40 \times 1000 + 1/40 \times 1000 \\ &= 50 \end{aligned}$$

$$\therefore P = 50 \text{ kg}$$

أي أننا نحتاج الى قوة تساوي ٥٠ كجم لسحب لوح وزنه ١٠٠٠ كجم .

## أمثلة متنوعة :

مثال ١ :



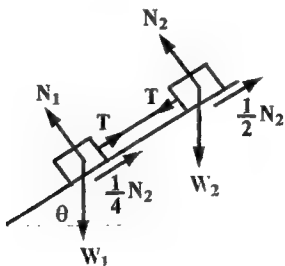
في الشكل المين  $W_1$  تساوي ٥٠ كجم و  $W_2$  ٣٠ كجم وهما مربوطان معا بحبل مواز للمستوى المائل بزاوية  $\theta$  . معامل الاحتكاك بين  $W_1$  و المستوى يساوي  $\frac{1}{4}$  و بين  $W_2$  و

المستوى يساوي  $\frac{1}{2}$  . احسب قيمة الزاوية  $\theta$  التي يحدث عندها الإنزلاق و قيمة الشد في الحبل عندئذ.

الحل :

بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه لإتزان  $W_1$  :

$$T + \frac{1}{4}N_1 = W_1 \sin \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$



$$N_1 = W_1 \cos \theta \dots\dots\dots (2)$$

من المعادلتين ( 1 ) ، ( 2 ) نحصل على :

$$T = W_1 \sin \theta - \frac{1}{4} W_1 \cos \theta \dots\dots\dots (a)$$

كذلك بالتحليل في اتجاه المستوى المائل و العمودي عليه إتران  $W_2$  :

$$T + W_2 \sin \theta = \frac{1}{2} N_2 \dots\dots\dots (a)$$

$$N_2 = W_2 \cos \theta \dots\dots\dots (a)$$

من المعادلتين ( 3 ) ، ( 4 ) نحصل على :

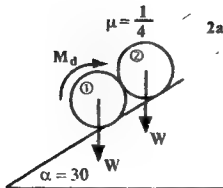
$$T = \frac{1}{2} W_2 \cos \theta - W_2 \sin \theta \dots\dots\dots (a)$$

بقسمة المعادلتين ( a ) ، ( b ) يتج أن :

$$\tan \theta = 0.344 \quad \therefore \theta = 19.0^\circ$$

ثم من المعادلتين ( a ) و ( b ) نحصل على  $T = 4.43 \text{ kg}$

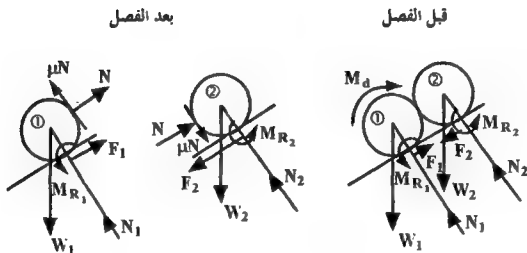
مثال ٢ :



أسطوانتين متماثلتين وزن كل منهما  $(W = 500 \text{ N})$  و نصف قطر كل منهما  $(a = 50 \text{ cm})$  و وضعت الأسطوانتان كما هو مبين بالشكل على مستوى مائل عشن  $(\alpha = 30^\circ)$  على الأفقي عين عزم

الإدارة ( $M_d$ ) اللازم لكي تتدحرج الأسطوانتان بانتظام على المستوى علما بأن معامل الاحتكاك  
الانزلاقي بين الأسطوانتين يساوي  $\frac{1}{4}$  ، و معامل الاحتكاك التدحرج بين الأسطوانتين و  
الأرض ( $a_R = 0.01 \text{ m}$ ) .

الحل :



دراسة الأسطوانة ٢

$$\sum M_A = 0$$

$$-N(a) + \mu N(a) + M_{R_2} + W \sin \alpha(a) = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$\therefore N_2 - \mu N - W \cos \alpha = 0$$

$$M_{k_2} = N_2 \times a_R = (\mu N + W \cos \alpha) a_R \quad \dots\dots\dots (2)$$

بالتعويض من 2 في 1 :

$$\therefore -N(a) + \mu N(a) + W \sin \alpha(a) + (\mu N + W \cos \alpha) a_R = 0$$

و المحالة العددية المعطاة نجد أن  $N = 346.6$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$-M_d + N(a) + \mu N(a) + W \sin \alpha(a) + M_{R_1} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$\therefore N_1 - W \cos \alpha + \mu n = 0$$

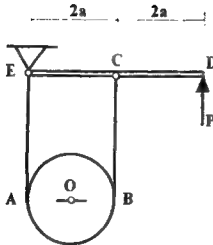
$$M_{R_1} = N_1 \times a_R$$

$$M_{R_1} = (W \cos \alpha - \mu N) \times a_R \dots\dots\dots (4)$$

بالتعويض من 4 في 3 يمكن إيجاد  $M_d$

$$M_d = 345.1 \text{ N.m} \quad \text{و للحالة المدددة المعطاة نجد أن :}$$

مثال ٣ :

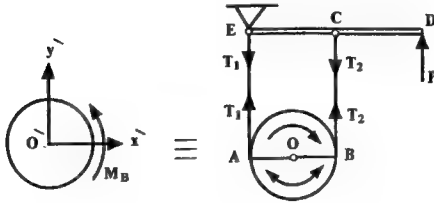


تؤثر قوة P في طرف رافعة ED قابلة للدوران حول مفصل E ، عبارة عن سير ملفوف حول طارة خشبية معامل الاحتكاك بينهما  $\mu = 1/2$  بغرض فرملتها ، عين عزم مقاومة دوران الطارة الناشئ من احتكاك السير .



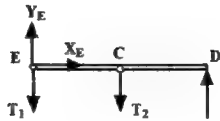
الحل :

الإحتمال الأول : أن الطائرة تدور مع عقارب الساعة و عليه فإن  $BC$  الطرف الساحب للفرملة ،  
الطرف المسحوب .  $AE$



دراسة اتزان القضيب :

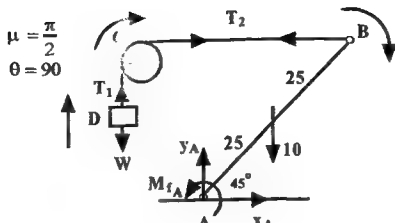
$$\begin{aligned}\sum M_L &= 0 \\ -T_1(2a) + P(4a) &= 0 \\ T_1 &= 2P\end{aligned}$$



و من قانون الحبال

$$\begin{aligned}T_2 &= T_1 e^{+\mu\theta} \\ 2P &= T_1 e^{+\frac{1}{2}\pi} \\ \therefore T_1 &= 2P e^{-\frac{1}{2}\pi}\end{aligned}$$





دراسة التوازن الجسم D

$$\Sigma Y = 0$$

$$T_1 - W = 0 \dots\dots\dots (1)$$

دراسة الحبل " قانون الجبال "

$$T_2 = T_1 e^{\mu \theta} = W e^{\frac{\pi}{2}} = W e \dots\dots\dots (2)$$

دراسة التوازن القضيب

$$\Sigma X = 0$$

$$\therefore x_A - T_2 = 0 \quad \therefore x_A = T_2 = W e \dots\dots\dots (3)$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$y_A - 10 = 0 \quad \therefore y_A = 10 \dots\dots\dots (4)$$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$M_{f_A} - 10 \left( \frac{25}{\sqrt{2}} \right) + T_2 \left( \frac{50}{\sqrt{2}} \right) = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$M_{f_A} = R_A a_f = \frac{1}{2} \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(We)^2 + (10)^2}$$

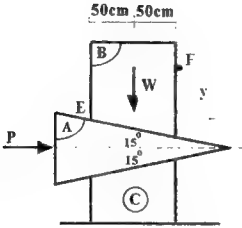
بالصويض في 5 ينتج

$$\frac{1}{2}\sqrt{(W_e)^2 + (10)^2} - 10\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) + W_e\left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$W_e = 4.8765 \text{ N}$$

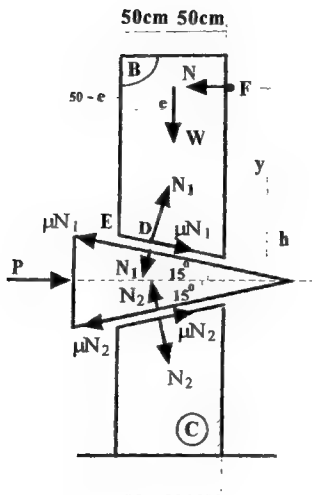
الحالة الثانية : بدراسة اتزان الجسم ثم دراسة اتزان المحيط ثم دراسة اتزان القضيب يمكن تعيين القيم الأخرى لـ  $W$ .

مثال ٥ :



يراد رفع كتلة  $B$  وزنها  $W$  بواسطة اسفين  $A$  على شكل منشور مثلثي خشن زاوية رأسه  $30^\circ$  و زاوية احتكاكه تساوي  $15^\circ$  ينزلق بين كتلة  $C$  مثبتة في الأرض و بين الكتلة  $B$  المرتكزة على وتد أملس عند  $F$ . عين أكبر بعد  $y$  للوتد حتى لا تنقلب الكتلة  $B$  و عين قيمة  $P$  بدلالة الوزن  $W$ .

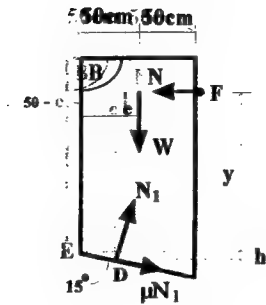
الحل :



$$\mu = \tan \lambda = \tan 15^\circ$$

$$\frac{h}{50 - e} = \tan 15^\circ$$

$$\therefore h = (50 - e) \tan 15^\circ$$



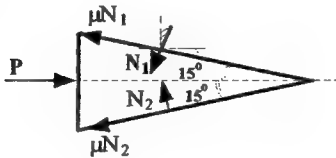
اتزان الكتلة B :

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$\therefore N_1 \cos 15^\circ - \mu N_1 \sin 15^\circ - W = 0$$

$$\therefore N_1 = \frac{W}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} \dots \dots \dots (1)$$

$$= 1.1154 W$$



$$\therefore \sum X = 0$$

$$\therefore N - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_1 \cos 15^\circ = 0$$

$$\therefore N = \frac{W(\sin 15^\circ + \mu \cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = 0.5774 W$$

$$\therefore \sum M_D = 0$$

$$\therefore N(y + h) = We$$

$$0.5774 W(Y + 13.3975 + 0.2679 e) = We$$

$$\therefore \frac{W(\sin 15^\circ - \mu \cos 15^\circ)(y(50 - e) \tan 15^\circ)}{\cos 15^\circ - \mu \sin 15^\circ} = We$$

$$\frac{0.5774 y + 7.7357}{1.1547} = e$$

$$\therefore \mu = \tan 15^\circ$$

$$\therefore e = \frac{2(y + 50 \tan 15^\circ) \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ \tan 15^\circ} \dots \dots \dots (3)$$

$$e = 0.5Y + 6.7$$

و لنضاهي الانقلاب حول E يجب أن تكون :

$$e < 50 \text{ cm} \dots \dots \dots (4)$$

$$0.5y + 6.7 < 50$$

$$y < 86.6$$

و بالتعويض من (3) في (4)

$$\therefore y < 25(\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)$$

$$\therefore y < 87 \text{ cm} \dots \dots \dots (5)$$

و لنجد مقدار القوة p :

من اتران الأسفين A :

$$\therefore \sum Y = 0$$

$$\therefore \mu N_1 \sin 15^\circ - N_1 \cos 15^\circ + N_2 \cos 15^\circ - \mu N_2 \sin 15^\circ = 0$$

$$\therefore N_1 = N_2 \dots \dots \dots (6)$$

$$\therefore \sum X = 0$$

$$\therefore P = \mu N_1 \cos 15^\circ - N_1 \sin 15^\circ - \mu N_2 \cos 15^\circ - N_2 \sin 15^\circ = 0 \dots \dots (7)$$

و بالتعويض من (6) في (7) مع مراعاة أن  $\mu = \tan 15^\circ$

$$\therefore P = 2N_1 \sin 15^\circ + 2\mu N_1 \cos 15^\circ$$

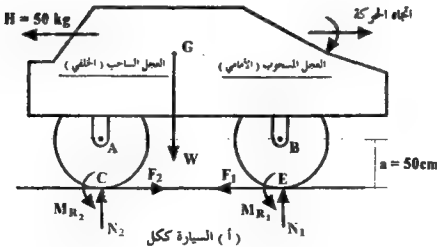
$$P = \frac{2W \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ \tan 15^\circ}$$

$$\therefore P = 1.15 W$$

مثال ٦ :

سيارة وزنها الكلي 1000 kg و وزن كل من عجلاتها الأربع 25 kg و نصف قطر كل منها 50 cm . إذا كان مقاومة التدحرج لكل عجلة يساوي نصف قطر دائرة احتكاك محورها يساوي 0.05 cm . عين عزم الادارة اللازم لتحريك السيارة بسرعة منتظمة على ارض أفقية خشنة ضد مقاومة هواء قدرها 50 kg .

الحل :

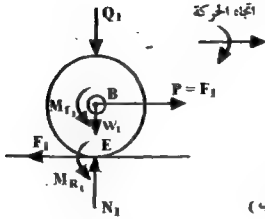




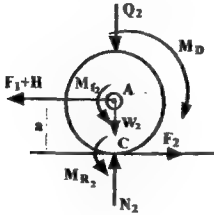
.  $W = 1000 \text{ kg}$  = وزن السيارة كلها

.  $W_1 = 50 \text{ kg}$  = وزن العجلتين الأماميتين

.  $W_2 = 50 \text{ kg}$  = وزن العجلتين الخلفيتين



( ب ) العجل الأمامي ( المسحوب )



( ج ) العجل الخلفي ( الساحب )

.  $H = 50 \text{ kg}$  = مقاومة الهواء

.  $a = 50 \text{ cm}$  = نصف قطر العجلة

.  $a_r = 0.05 \text{ cm}$  = ذراع مقاومة التدرج

.  $r_f = 0.05 \text{ cm}$  = نصف قطر دائرة الإحتكاك

.  $Q_1$  = الحمل الواقع على العجل الأمامي فقط

.  $Q_2$  = الحمل الواقع على العجل الخلفي فقط

من اتزان السيارة ككل ( شكل أ ) :

$$\sum Y = 0 \quad N_1 + N_2 = W \quad (1)$$

$$\sum X = 0 \quad F_2 = F_1 + H \quad (2)$$

من اتزان العجل الأمامي ( المسحوب ) شكل ( ب ) :

$$\sum Y = 0 \quad \therefore N_1 = Q_1 + W_1$$

$$\therefore Q_1 = N_1 - W_1$$

$$\therefore M_{f1} = Q_1 \cdot r_f = (N_1 - W_1) r_f$$

$$M_{R1} = N_1 a_r$$

$$\sum M_a = 0$$

$$\therefore F_{1a} = M_a + M_{R1}$$

$$\therefore F_{1a} = (N_1 - W_1) r_f + N_1 a_r \quad (3)$$

من اتزان العجل الخلفي ( المساحب ) شكل ( ج ) :

$$\sum Y = 0 \quad \therefore N_2 = Q_2 + W_2$$

$$\therefore Q_2 = (N_2 - W_2)$$

$$\therefore M_{f2} = Q_2 r_f = (N_2 - W_2) r_f$$

$$M_{R2} = N_2 a_r$$

$$\sum M_a = 0$$

$$\therefore M_D = M_{f2} + M_{R2} + F_2 a$$

$$\therefore M_D = (N_2 - W_2) r_f + N_2 a_r + F_2 a \quad (4)$$

وبالتعويض من (2) ، في (3) ، في (4) :

$$\therefore M_D = (N_2 + W_2) r_f + N_2 a_r + (N_1 - W_1) r_f + N_1 a_r + H a$$

$$M_D = (N_1 + N_2) a_r + (N_1 + N_2 - W_1 - W_2) r_f + H a \quad (5)$$

ومن التعويض من (1) في (5)

$$M_D = Wa - (W - W_1 - W_2)r_f + Ha \quad \dots \dots \dots (6)$$

و للحالة العددية المعطاة .

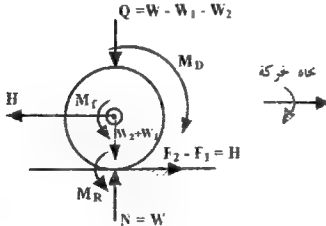
$$\therefore M_D = 1000 \times \frac{5}{100} + (1000 - 50 - 50) \times \frac{5}{100} + 50 \times 50$$

$$\therefore M_D = 2595 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

ملاحظة :

المعادلة (6) التي تعطي مقدار عزم الإدارة  $M_D$  اللازم للعجل الساحب يمكن الحصول عليها فيما لو اعتبرنا جميع العجلات عجلة واحدة ساحية وزنها هو وزن العجلات الأربع (  $W_1 + W_2$  ) والحمل الواقع عليها  $Q$  هو الوزن للسيارة دون العجلات (  $W - W_1 - W_2$  ) و نوتر عدد مركزها مقادير الهواء  $H$  كما هو مبين بشكل ( د ) و من هذا الشكل يتضح .

$$M_f = Qr_f = (W - W_1 - W_2)r_f \quad ; \quad M_R = Na - Wa_r$$



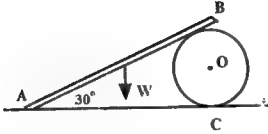
$$\sum M_O = 0$$

$$M_D = M_R + M_f + H \cdot a = Wa_r + (W - W_1 - W_2)r_f + H \cdot a$$

و هي نفس المعادلة (6)

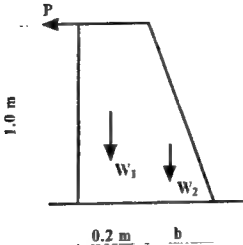
## تمارين

١ - قضيب  $AB$  وزنه  $W$  يرتكز في وضع التران حرج على أرض خشنة و على اسطوانة خفيفة مساوية لها في الخشونة و نصف قطرها  $a$  . أثبت أن زاوية الاحتكاك  $= 15^\circ$  و عين طول القضيب . أحسب رد فعل الأرض في  $C$  .



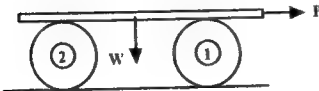
الجواب :  $l = 4.32 a$  ,  $R_D = R_C = 0.52 W$

٢ - منشور ثقيل متجانس مقطعه شبه منحرف بعده العمودي على الورقة موز موضوع فوق أرض السقية خشنة ( $\mu = 1/3$ ) كما في الشكل عين أقل قيمة للبعد لو أثرت قوة أفقية كافية  $P$  على المنشور لانتزلق دون أن ينقلب .



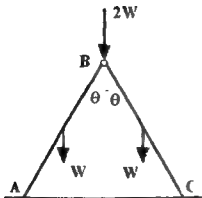
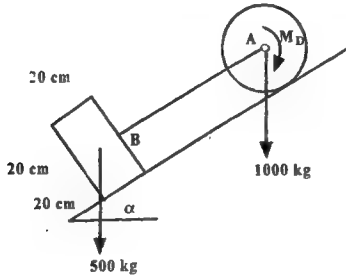
الجواب :  $b = 0.764 m$

٣ - لوح ثقيل وزنه  $W$  موضوع فوق اسطوانتين خشنتين مهملتين الوزن كما في الشكل ذراع مقاومة التدحرج بسين



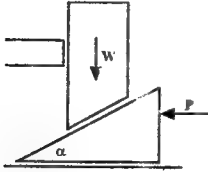
الاسطوانتين و اللوح  $a_2$  و بين الاسطوانتين و الأرض  $a_1$  و نصف قطر كلا من الاسطوانتين  $a$  و المطلوب تعيين أقل قوة  $P$  تكفي لسحب اللوح

٤ - تتدحرج عجلة نصف قطرها 20 cm ووزنها 1000 kg أعلى مستوى مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية  $\alpha$  حيث  $\tan \alpha = 0.1$  . و يرتبط مركز العجلة A بنصف كتلة خشبية مستطيلة المقطع عند B ( وزن الكتلة 500 kg ) بواسطة خيط AB . فإذا كانت العجلة تتدحرج تحت تأثير عزم إدارة  $M_D$  و نصف قطر دائرة احتكاك محورها A يساوي ذراع مقاومة التدحرج لها  $= 0.05 \text{ cm}$  . عين أقل و أكبر قيمة لمعامل احتكاك المستوى الخشن حتى لا تنزلق العجلة و لا تنقلب الكتلة الخشبية . و اذا اتخذ معامل الإحتكاك قيمة متوسطة عين عزم الإدارة اللازم لتحريك المجموعة حركة منتظمة على المستوى .



٥ - لوحان متطمان طول كل منهما  $2a$  يرتبطان مفصليا في B و يرتكزان في C, A على أرض خشنة معامل احتكاكها  $1/2$  . عين زاوية اميل  $\theta$  لكس من اللوحين على الرأسى عند وشك الانزلاق . اذا كان هناك احتكاك مفصلي في B يساوي  $\frac{W a}{4}$  أوجد  $\theta$  في هذه الحالة عند وشك الانزلاق ايضا

٦ - تؤثر قوة أفقية  $P$  على منشور ثلاثي زاوته  $\alpha$  ( $\tan \alpha = 1/3$ ) لتؤفع ورناء  $W$  كما في الشكل أوجد  $P$  بدلالة  $W$  في كل من الحالات الآتية :

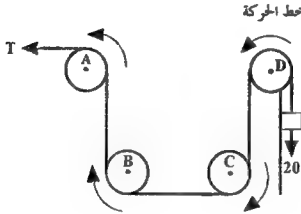


١ - جميع مواضع التلامس ملساء

ب - جانبا المنشور خشنان بمعامل احتكاك قدره ٠,٢ .

و إذا أزيلت  $P$  في الحالة الثانية هل ينزلق المنشور الى الخارج .

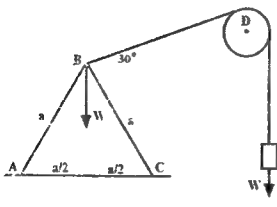
الجواب : أ -  $P = W/3$  ، ب -  $P = 0.57 W$  ، المنشور لا ينزلق



خط الحركة

٧ - عين قيمة الشد للتركيبة المينة بالشكل اذا علمت أن معامل الاحتكاك بين الإسطوانات و

$$\mu = \frac{1}{\pi}$$

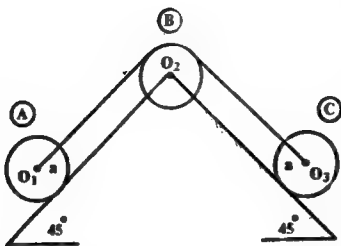


٨ - اذا كانت البكرة  $D$  في المجموعة المينة

بالشكل خشنة و معامل احتكاك  $\mu = \frac{3}{2\pi}$  . عين وزن المنشور

$ABC$  بدلالة  $W$  لكي ينزلق و أثبت أنه لا ينقلب . معامل الاحتكاك بين

المنشور و الأرض هو :  $\mu^* = \frac{\sqrt{3}}{8}$  .



٩ - المعجلان A و C وزن الأول

A هو W ووزن الثانية C

هو W' و نصف قطر كل

منهما a يتدحرجان على

مسوئين مائلين خشبيين كما

بالشكل حيث يرتبط محوروا

المعجلين O1 و O3 بحيط

خفيف يمر على بكره خشنة

ثابتة B بمعامل احتكاكهما

يساوي  $\frac{2}{\pi}$  . فإذا كان نصف قطر دائرة احتكاك كل من المحورين O1 و O3 يساوي فراع

مقاومة التدحرج لكل من المعجلين  $= \frac{a}{20}$  . عين أليل قيمة للوزن W' بدلالة الوزن W حتى

تدحرج المعجلة C أسفل المسوى .

١٠ - لوحة مربعة ABCD طول ضلعها 4l ووزنها W ، القطر AC رأسي و يرتكز في الوضع المبين

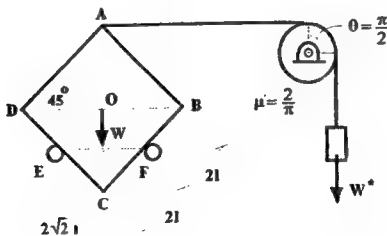
على وتلين خشبين F و E في المسوى الأفقي واحد عند منتصفي CB و DC و معامل

الاحتكاك لكل من الودتين مقداره  $(\mu = 1/2)$  ، و اذا ربطت اللوحة من A بحيط يمر على بكره

خشنة و يتدلى من طرفه الآخر ثقل مقداره W' و معامل الاحتكاك بين البكرة و الحيط مقداره

$(\mu' = 2/\pi)$  . عين مقدار الثقل W' بدلالة اللوحة ( W ) عندما تكون اللوحة على وشك

الانزلاق .



## مركز الثقل

### مركز الكتل ومركز الثقل

يعتبر تعيين مركز الثقل من الخواص العامة في دراسة اتزان أي جسم كما يستفاد من تعيين مركز المساحة في معرفة ودراسة الخواص الخاصة بها وهو ما يلزم في دراسة نظرية الإنشاء وغيرها.

#### تعريف مركز الكتل :

مركز الكتل هو ذلك المركز الذي يتوسط تلك المجموعة من الكتل والتي لو ركزت جميعاً في هذا المركز لأصبح عزم الكتلة الكلية حول أي محور مساوياً لمجموع عزوم الكتل المنفردة حول نفس المحور.

فإذا توأمر لدينا عدد من الكتل ولتكن  $(m_1, m_2, m_3)$  وكان مركزها المتوسط هو  $C$  ، وتطبيقاً لهذا التعريف بأخذ العزوم حول المحورين الرأسى والأفقي شكل (١)

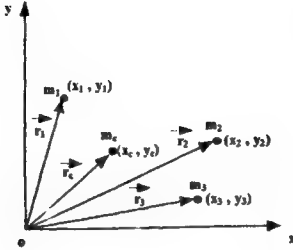
$$m_1x_1 + m_2x_2 + \dots = (m_1+m_2+\dots)x_c$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \dots = (m_1+m_2+\dots)y_c$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} , y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \dots \dots \dots (1)$$



وبمجم هاتين المعادلتين  
التحليليتين في معادلة اتجاهية واحدة  
على الصورة



$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (2)$$

وبالنسبة لحالة الأجسام المتماثلة يكون توزيعها توزيعاً متصلاً بحيث تقسم الكتلة إلى شرائح صغيرة  $\Delta m$  ويطبق عليها نفس التعريف السابق مع استعمال التكامل بدلاً من المجموع.

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm}, \quad y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \quad (3)$$

وبالمثل للإحداثي Z في الحالة الفراغية العامة .

أما مركز الثقل فهو مركز أوزان هذه الكتل ولما كانت الأوزان عبارة عن مجموعة من القوى المتوازنة المناسبة في مقاديرها لمقادير الكتل ومعامل التناسب هو عجلة الجاذبية فإن مركز الثقل يطابق مركز الكتل .

## الأجسام المتجانسة :

في حالة ما إذا كان للجسم كثافة ثابتة مقدارها  $\rho$  لجميع أجزائه يمكن الاستعاضة عن الكتلة بالحجم  $V$  نظراً لتناسب الإثنين في هذه الحالة.

$$x_c = \frac{\int x \, dm}{\int dm} = \frac{\int x \rho \, dv}{\int \rho \, dv} = \frac{\int x \, dv}{\int dv} \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$y_c = \frac{\int y \, dm}{\int dm} = \frac{\int y \rho \, dv}{\int \rho \, dv} = \frac{\int y \, dv}{\int dv}$$

ويمكن تسمية المركز C في هذه الحالة بمركز الحجم .

## الأجسام الرقيقة :

في حالة الأجسام القشرية الرقيقة المتناهية السمك فيكون الحجم V رقيقا متجانس السمك ولذا يستعاض عنه بالسطح S ويسمى المركز C في هذه الحالة مركز المساحة السطحية أو مركز السطح.

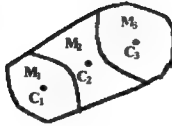
$$x_c = \frac{\int x \, ds}{\int ds} \quad , \quad y_c = \frac{\int y \, ds}{\int ds} \quad \dots\dots\dots (5)$$

## الأجسام الطولية

وفي حالة الأجسام الطولية أو الخطية المتجانسة المقطع يستعاض عن الحجم V بالطول L ويسمى المركز C في هذه الحالة بمركز النحى ويتعين بالمعادلتين .

$$x_c = \frac{\int x \, dl}{\int dl} \quad , \quad y_c = \frac{\int y \, dl}{\int dl} \quad \dots\dots\dots (6)$$

## ١- نظرية مراكز الأجزاء :



شكل (٧)

إذا كان جسم ما مكونا من أجزاء معروفة الكتل والمراكز فإن مركز الجسم بأكمله يتعين كما لو كانت كتل الأجزاء مركزة في مراكزها (شكل ٧).

$$x_c = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_1 + M_2 + M_3} , y_c = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2 + M_3 y_3}{M_1 + M_2 + M_3} \dots (7)$$

وإذا احتوى الجسم على بعض الثقوب فإن مادة الثقب تعتبر كتلة سالبة عند التعويض في المعادلتين السابقتين.

## المستويات المركزية والتماثل :

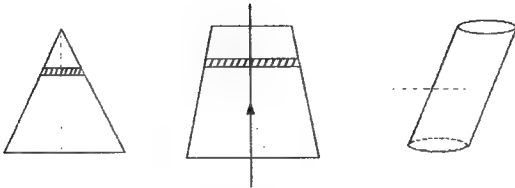
نفرض أن المستوى  $xy$  يمر بمركز الكتلة فيكون

$$Z_c = 0 \quad \therefore \int Z dm = 0$$

وعلى ذلك يجب أن يقطع المستوى  $xy$  الجسم لتواجد قيم موجبة وقيم سالبة للمنحرف  $z$  بحيث يتلاشى التكامل .

وعلى ذلك إذا كان الجسم متماثلا بالنسبة لمستوى معين فلا بد أن يقع المركز في ذلك المستوى وكل محور تماثل يمر بالمركز .

وإذا كان هناك مركز تماثل (ملتقى محاور تماثل ) فإن مركز الكتلة يقع عليه كمركز الكرة ومركز المربع .



مساحة مثلثية

مساحة على شكل شبه منحرف

سطح أسطوانى مائل

شكل (٣)

تسرى هذه القاعدة فى حالة ما إذا كان محور التماثل مائلا أو متعامدا (شكل ٣)

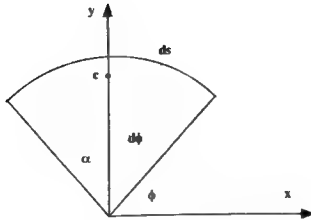
### بعض الأمثلة بالتكامل المباشر :

تسهل عمليات التكامل الواردة بالمعادلات (٤) و(٥) و(٦) إذا أحسنا تجزئ الجسم إلى عناصر تفاضلية معروفة المركز وبذلك يمكن تقادى التكاملات المقعدة ومن المهم اختيار التعبير المناسب لتظهر التكاملات فى الصورة المألوفة.

### (١) مركز قوس دائرى:

نفرض الزاوية المركزية للقوس  $2\alpha$  ونصف قطر الدائرة  $a$ . يتماثل القوس حول منتصف زاويته المركزية وهو المحور  $y$  (شكل ٤) ولذلك يقع مركز القوس  $C$  على المحور  $y$  وتلاشى  $x_c$  وأما  $y_c$  فتعنيها ثانية المعادلين (٥)

$$y_c = \frac{\int y \, ds}{\int ds} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a \sin \phi) a \, d\phi}{a \cdot 2\alpha} = \frac{a}{\alpha} \sin \alpha$$



شكل (٤)

لربع دائرة تغطي النتيجة السابقة بتعويض  $\alpha$  بالتقدير الدائري

$$y_c = \frac{a \cdot (1/\sqrt{2})}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi}$$

ولنصف دائرة :

$$y_c = \frac{a \cdot 1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

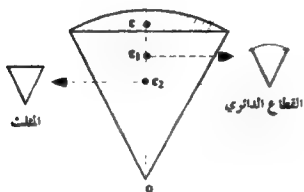
## (٢) مركز قطاع دائري:

بالقسم إلى مثلثات صغيرة زاويتها المركبة  $d\phi$  وتطبيق ثانية المتكاملين (٥) نحصل على  $y_c$

$$y_c = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{1}{s} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}+\alpha} \frac{2}{3} \sin \phi \cdot \frac{s^2}{2} d\phi$$

$$y_c = \frac{2s \sin \alpha}{3\alpha}$$

## (٣) مركز قطعة دائرية:



شكل (٥)

سنسعمل هنا نظرية  
مراكز الأجزاء الموضحة بالبد  
(١) وذلك باعتبار القطعة  
الدائرية الفرق بين القطاع  
الدائري والمثلث شكل (٥)

$$y_c (s^2 \alpha - s^2 \sin \alpha \cos \alpha) = s^2 \alpha \cdot \frac{2s \sin \alpha}{3\alpha} - s^2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{2s}{3} \cos \alpha$$

$$y_c = \frac{2s \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

#### (٤) مركز شبة منحرف:

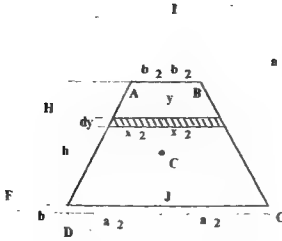
بأخذ شريحة  $x$  وارتفاعها

$dy$  الشكل وتطبيق المعادلتين

(٥) نحصل على

$$y_c = \frac{\int_0^h y ds}{S} = \frac{\int_0^h x y dy}{S}$$

ومن تشابه المثلثات :



$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{H-y}{H}, \quad \frac{H-h}{H} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore x = a - \frac{a-b}{h} \cdot y$$

$$y_c = \frac{\left[ \frac{a y^2}{2} - \frac{a-b}{h} \frac{y^3}{3} \right]_0^h}{\frac{h}{2}(a+b)}$$

وبتعميق خددين الأعلى والأدنى للتكامل نحصل بعد شي الاختزال على  $y_c$  ويمكن تعيين المركز C

بالرسم وذلك بعد BA إلى E بحيث  $BE = \alpha$  وبعد CD إلى F بحيث  $DF = b$  فإن المركز C هو

نقطة تقاطع IJ وFE كما هو موضح بشكل (٦)

## (٥) مركز مساحة محدودة بقطع مكافئ:

(١) المساحة المحدودة بالقطع المكافئ  $y^2 = 4ax$  ومحور  $x$  والنقطة الرأسى  $x = b$

تقسم المساحة إلى شرائح رأسية (شكل ٧) مساحة كل منها  $\Delta x$  يتركز مادة الشريحة فى مركزها  $C_1$  واحداثياته  $(x, y/2)$  ثم تؤخذ عزوم هذه المادة المركز  $C_1$  وعزم المادة الكلية للشريحة الرقيقة التى تحتلها المساحة باعتبارها مركزة فى المركز العام  $C_1$  وذ  $\bar{x}$  حول المحورين  $(x, y)$  لنحصل على معادلتين على النمط (٤)

$$x_{c_1} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} = \frac{\int x y \, dx}{\int y \, dx}$$

$$y_{c_1} = \frac{\int \frac{y}{2} \, ds}{\int ds} = \frac{\int \frac{y}{2} y \, dx}{\int y \, dx}$$

وبالتعويض عن  $y$  من معادلة القطع المكافئ المعطاه نحصل على

$$x_{c_1} = \frac{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{3/2} \, dx}{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{1/2} \, dx} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right) \left[x^{5/2}\right]_0^b}{\left(\frac{2}{3}\right) \left[x^{3/2}\right]_0^b} = \frac{3}{5} b$$

$$y_{c_1} = \frac{\int_0^b 2a x \, dx}{\int_0^b 2\sqrt{a} x^{1/2} \, dx} = \frac{a \left[x^{1/2}\right]_0^b}{\left(\frac{4}{3}\sqrt{a}\right) \left[x^{3/2}\right]_0^b} = \frac{3}{4} \sqrt{ab}$$

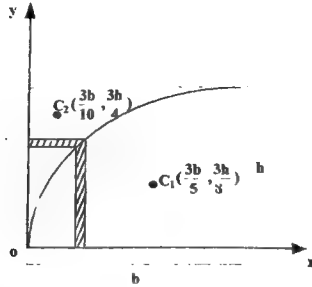
وبتعويض احداثى نقطة  $A$  فى معادلة القطع المكافئ نحصل على

$$h = 2\sqrt{2b} \quad , \quad y_{c_1} = \frac{3}{8} h$$



(ب) المساحة المحدودة بالقطع المكافئ ( $y^2 = 4ax$ ) ومحور  $y$  والخط الأفقي  $y = h$

تقسم المساحة إلى شرائح أفقية كما في الشكل مساحة كل منها  $\Delta y$  وتركز مادة الشريحة في مركزها واحداتيا  $(x/2, y)$  ثم تؤخذ العزوم حول المحورين كما في الحالة السابقة .



شكل (٧)

$$x_{c_1} = \frac{\int \frac{x}{2} ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h \frac{x}{2} dy}{\int_0^h x dy}$$

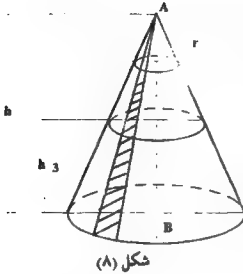
$$y_{c_1} = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\int_0^h y x dy}{\int_0^h x dy}$$

وبالتعويض عن  $y$  من معادلة القطع المكافئ نحصل بعد إجراء التكاملات وتعويض النهايات كما في الحالة (أ) على النتائج الآتية :

$$x_{c_1} = \frac{3}{10}b \quad y_{c_1} = \frac{3}{4}h$$

ونتايج الحالتين مجمعة في شكل (٧)

## (٦) مركز سطح مخروطي أو هرمي:



بتقسيم السطح إلى مثلثات صغيرة كالمثلث المثلل بشكل (أ) فإن مركزها جميعا تقع على ارتفاع  $h/3$  من القاعدة وكذلك مركز السطح ولكن لا يقع مركز السطح على المحور BA إلا إذا كان المخروط

أو الهرم قائما مع توفر شروط التماثل المساحي بالنسبة إلى المحور وإذا قطعنا أجزاء من السطح المخروطي بمستو مواز للقاعدة حصلنا على مخروط ناقص يقع على مركزه على ارتفاع قدرة

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{R+2r}{R+r}$$

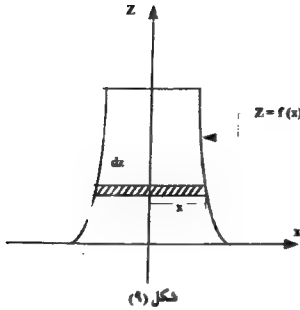
حيث R نصف قطر القاعدة الكبرى r نصف قطر القاعدة الصغرى .

والنتيجة السابقة يمكن برهنتها بتقسيم السطح إلى أشباه منحرفة وتطبيق نتيجة مركز شبه المنحرف التي حصلنا عليها بالحالة (٥).

## (٧) مركز الحجم المخروطي أو الهرمي :

يقع المركز على المحور المركزي على ارتفاع  $h/4$  من القاعدة والمحور المركزي هو الخط المار برأس المخروط ومراكز المقاطع المتشابهة الموازية للقاعدة .

## (٨) مركز الحجم الدوراني :



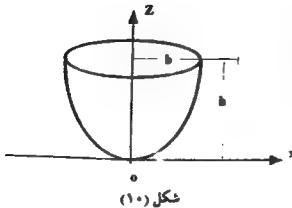
إذا ادير المنحنى  $f = z(x)$  حول محور  $z$  فإنه ينتج جسم دوراني مقطعة الممودى على  $z$  دائرى (شكل ٩)

يقع مركز ثقل هذا الجسم على محور التماثل  $z$  ويبقى تعيين إحداثية الرأس  $z_c$  لتعيين هذا الإحداثى يقسم الجسم إلى شرائح بواسطة مستويات أفقية مقاربة وتركز مادة الشريحة في مركزها وإحداثيات  $(x, y)$  وأما مقدار حجمها فهو

(٤)  $\int x^2 dz$  تؤخذ العزوم لمادة الشريحة المركزة حول محور  $x$  فنحصل على معادلة على النمط

$$z_c = \frac{\int_{z_1}^{z_2} (\pi x^2 dz) \cdot z}{\int_{z_1}^{z_2} \pi x^2 dz}$$

أمثلة :

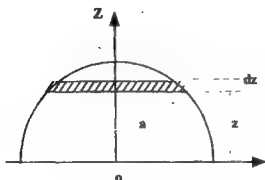


١ - عين مركز الحجم الدوراني الناشئ من دوران النطع المكافئ  $(x^2 = 4az)$  بين  $z=0$  و  $z=h$  حول محور  $z$  (الشكل)

$$z_c = \frac{\int_0^h (\pi x^2 dx) \cdot z}{\int_0^h \pi x^2 dz} = \frac{\int_0^h 4a z^2 dz}{\int_0^h 4a z dz}$$

$$= \frac{\left[ \frac{4a z^3}{3} \right]_0^h}{\left[ \frac{4a z^2}{2} \right]_0^h} = \frac{2}{3} h$$

أى أن مركز الحجم المكافئ الدوراني يقع في ثلثي ارتفاعه من ناحية الرأس .



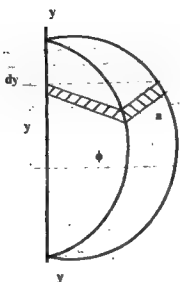
٢ - عين مركز الحجم لنصف كرة مصمتة نصف قطرها  $a$  (الشكل) وتقسم نصف الكرة إلى شرائح أفقية كالمينة بالرسم ونستخدم المعادلة (٩) لتحين  $z_c$

$$z_c = \frac{\int_0^a (\pi x^2 dz) \cdot z}{\int_0^a \pi x^2 dz} = \frac{\int_0^a z(a^2 - z^2) dz}{\int_0^a (a^2 - z^2) dz}$$

$$= \frac{\left[ \frac{a^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^a}{\left[ a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^a}$$

$$= \frac{3}{8} a$$

أى أن مركز ثقل نصف كرة مصمتة يقع على محور تماثله ويبعد عن مركز الكرة بمقدار  $\frac{8}{3}$  نصف القطر .



٣ - عين مركز شقة كروية مصمتة زاويتها المركزية  $2\alpha$  بتقسيم الشقة إلى شرائح أفقية كما هو مبين بالشكل يكون حجم كل شريحة

$$\Delta v = \alpha x^2 \cdot \Delta y$$

وبعد مركزها عن المحور yy هو

$$\frac{2x \sin \alpha}{3\alpha}$$

وبذلك يكون بعد مركز الشق e عن yy في القطاع الأوسط معطى بالمعادلة

$$v \cdot e = \int_0^a \alpha x^2 dy \cdot \frac{2x \sin \alpha}{3\alpha}$$

بالتعويض

$$x = a \cos \phi, \quad dy = a \cos \phi \, d\phi$$

$$\alpha \cdot \frac{4}{3} a^2 e = \frac{4}{3} a^4 \sin \alpha \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \phi \, d\phi$$

$$= a^4 \sin \alpha \cdot \frac{3\pi}{16}$$

$$e = \frac{3\pi a}{16} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

بالتعويض عن  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  نحصل على بعد مركز نصف الكرة المصمتة

$$c_{max} = \frac{3}{8} a$$

كما سبق أن أوجدناه بطريقة أخرى .

### (٩) مركز السطح الدوراني:

يقسم السطح إلى شرائح نحلها مستويات عمودية على محور تماثل السطح (شكل ٩) المساحة الجانبية لكل شريحة تساوي

$$\Delta S = 2\pi x \Delta s$$

حيث  $s$  طول جزء المنحنى الذى تولد الشريحة من دورانه تركر سادة كل شريحة فى مركزها واحداتيا (  $x$  و  $0$  ) ثم نأخذ العزوم حول محور  $x$  للحصول على

$$Z_c = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int 2\pi x ds \cdot x}{\int 2\pi x ds}$$

للسطح نصف الكروى المبين بشكل (٩) تعطى المعادلة (١٠) ما يأتى :

$$\begin{aligned} Z_c &= \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin \theta \cdot 2\pi a^2 \cos \theta d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2 \cos \theta d\theta} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin \theta d \sin \theta}{[\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{a \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

## نظرية بابوس:

أ- إذا دار جزء من منحنى مستوي حول محور في مستوية زاوية قدرها  $\alpha$  فإن المساحة الجانبية للسطح الدوراني الناتج يساوي طول المنحنى مضروباً في مسار مركزه . فإذا دار المنحنى  $AB$  حول محور  $Z$  (شكل ١٢) زاوية قدرها  $\alpha$  وكان  $x_c$  بعد مركزه عن المحور  $Z$  فإن مساحة السطح الدوراني  $ABAB$  تعطى بالمعادلة ؟

$$S = \int \alpha x ds = \alpha \int x ds$$

ولكن مركز المنحنى يتعين بالمعادلة

$$x_c = \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int x ds}{L}$$

حيث  $L$  هي الطول الكلي للمنحنى، ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$S = L \cdot (\alpha x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الأول من النظرية .

وإذا كانت  $\alpha$  دورة كاملة فإن

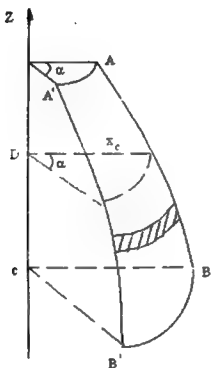
$$S = L \cdot (2\pi x_c)$$

و بتطبيق ذلك على قوس نصف دائري نحصل على

$$S = 4\pi a^2 = 2\pi x_c \cdot \pi a$$

$$x_c = \frac{2a}{\pi}$$

وهو ما يمكن الحصول عليه بتطبيق المعادلة



ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعيين مركز منحنى معلوم طوله ومساحة السطح المتولد من دورانه

ب - إذا دارت مساحة مستوية حول محور في مستويها فإن الحجم الدوراني الناتج يساوى المساحة مضروباً في مسار مركزها

بالإشارة إلى شكل (١٢) الحجم الناتج من دوران المساحة ABCD حول محور z تساوى

$$v = \int \alpha x dA$$

ولها  $\alpha A$  جزء صغير من المساحة ABCD ولكن مركز هذه المساحة يتعين من المعادلة

$$x_c = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x dA}{A}$$

ومن المعادلتين السابقتين ينتج أن

$$v = A \cdot (\alpha x_c)$$

وهو ما يثبت الشق الثانى من النظرية .

وإذا كانت  $\alpha$  دورة كاملة فإن

$$v = (2\pi x_c) \cdot A$$

ويتطبق ذلك على مساحة نصف دائرة ينتج أن

$$\frac{3}{4} \pi a^3 = 2\pi x_c \cdot \frac{\pi a^2}{2} \rightarrow \therefore x_c = \frac{4a}{3\pi}$$

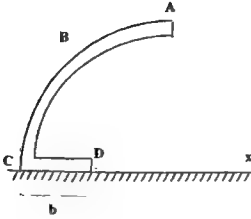
وهذا هو مركز مساحة نصف دائرة .

ومن الواضح أن هذا الشق من النظرية يفيد في تعيين مركز مساحة مستوية معلومة إذا كان الحجم المتولد من دوراتها معلوماً .



## أمثلة محلولة

y



١ - مظلة مقطوعها يتألف من ربع دائرة ABC

بنصف قطر ٣ أمتار وقاعدة مستقيمة CD .

عين عرض القاعدة بحيث لا تنقلب المظلة

حول D علما بأن وزن وحدة الأطوال من

مقطع المظلة  $w =$

الحل:

الجزء الدائري ABC

ليكن وزنه  $W_1$  ومركز ثقله  $G_1(x_1, y_1)$

$$W_1 = \frac{1}{4} 2\pi \cdot 3w = \frac{3}{2} \pi w$$

$$x_1 = r - \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cdot \cos \alpha = 3 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \right) = 1.09 \text{ m}$$

$$y_1 = \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cdot \sin \alpha = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = 1.91 \text{ m}$$

الجزء المستقيم CD:

ليكن وزنه  $W_2$  ومركز ثقله  $C_2(x_2, y_2)$

$$W_2 = w b$$

$$x_2 = b, y_2 = 0$$



$$W_1 = 2\pi \times 5 \times \frac{60}{360} w = 5.22 w$$

$$x_1 = r \cos 30^\circ - \frac{r \sin \alpha}{\alpha} \cos 60^\circ$$

$$= r \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{6}} \right] = 1.95 \text{ m}$$

الجزء الدائري BC

ليكن وزن  $W$  ومركز ثقل  $G$  ( $x_2, y_2$ )

$$W_2 = w$$

$$x_2 = -50 \text{ m}$$

الجزء الدائري BD ليكن وزن  $W$  ومركز ثقل  $G$  ( $x_3, y_3$ )

$$W_3 = 5 \times 0.5 w = 25 w$$

$$x_3 = 0$$

الجزء الدائري DE ليكن وزن  $W_4$  ومركز ثقل  $G_4$  ( $x_4, y_4$ )

$$W_4 = b w$$

$$x_4 = \frac{b}{2}$$

مركز ثقل المظلة كلها G

$$x_G = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2 + W_3 x_3 + W_4 x_4}{W_1 + W_2 + W_3 + W_4}$$

عند وشك الانقلاب حول E تمر محصلة الأوزان بالنقطة E نفسها

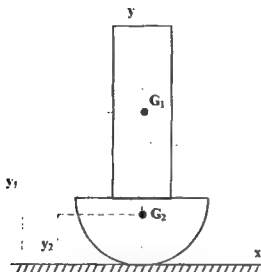
$$\therefore x_G = b = \frac{5.22 \times 1.95 - 1 \times 5 + 0 + b \cdot \frac{b}{2}}{5.22 + 1.0 + 2.5 + b}$$

وباختزال هذه العلاقة نحصل على المعادلة الآتية من الدرجة الثانية في  $b$

$$b^2 + 17.45 b - 19.4 = 0$$

ويعطى حل هذه المعادلة جبرياً الجذر الموجب الآتى

$$b = 1.00 \text{ m}$$



(٣) نصف كرة مصمتة نصف قطرها  $a$  مركب عليها اسطوانة من نفس مادتها وطولها  $\frac{8a}{3}$ . إذا وضع الجسم على أرض أفقية كان وضعه القائم وضعا ثانياً مستقر. عين أكبر نصف قطر للأسطوانة في هذه الحالة

الحل:

نفرض أن نصف قطر الاسطوانة  $r$  وأن وزن الاسطوانة  $W_1$  ووزن نصف الكرة  $W_2$  وأن وزن

وحدة الحجم من مادة الجسم  $W$

$$W_1 = \pi r^2 \cdot \frac{8a}{3} W$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 W$$

$G_1$  مركز ثقل الاسطوانة في منتصف ارتفاعها و  $G_2$  مركز ثقل نصف الكرة المصمتة على بعد

$\frac{3}{8}a$  من مركزها

$$\therefore y_1 = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3} a = \frac{7}{3} a$$

$$y_2 = \frac{5}{8} a$$

رد الفعل العمودي من الأرض يمر بمركز نصف الكرة وهذا إذا وقع مركز ثقل الجزيئين G تحت مركز الكرة وميل الجسم كون رد فعل الأرض والوزن الكلي إزدواجاً يعمل على إعادة الجسم إلى وضعة القائم وبالتالي يكون اتزان مستقراً وبالعكس إذا وقعت G فوق مركز الكرة

أما إذا وقعت G على مركز الكرة بالضبط كان الاتزان مستمراً وفي هذه الحالة

$$W_1 y_1 + W_2 y_2 = (W_1 + W_2) a$$

$$\therefore \pi r^2 \cdot \frac{8a}{2} \cdot \frac{7}{3} a + \frac{2}{3} \pi a^3 \cdot \frac{5a}{8} = (\pi r^2 \cdot \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \pi a^3) a$$

باختزال هذه المعادلة نحصل على :

$$r = \frac{3}{8\sqrt{2}}$$







0212192